Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 5

МЕХАНИКА

Ю. А. КРУТКОВ

О НОВОМ ТИПЕ КВАЗИ-КООРДИНАТ

(Представлено академиком В. А. Фоком 16 II 1953)

Если G есть количество движения материальной точки, то левая часть ее дифференциальных уравнений движения имеет вид $\dot{\mathbf{G}}$, т. е. в произвольно вращающейся координатной системе вид

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{G}' + \vec{\omega} \times \mathbf{G},$$

где $\dot{\mathbf{G}}$ — «абсолютная» производная по времени; $\mathbf{G}'$ — относительная и $\vec{\omega}$ угловая скорость вращения координатной системы.

Эта форма левой части дифференциальных уравнений движения не зависит от того, в функции каких переменных рассматривается угловая скорость вращения координатной системы $\vec{\omega}$. Простейший случай: $\vec{\omega}$ зависит только от времени t. Наиболее общее предположение будет: $\vec{\omega}$ зависит от t, от относительного положения и относительной скорости материальной точки, уравнения движения которой нас интересуют. Зависимость $\vec{\omega}$ от относительной скорости и дает новый тип квази-координат, которые были, насколько мне известно, впервые рассмотрены мною в [1]. В работе [1] рассмотрение проведено довольно сложным образом. Цель настоящей заметки провести его вполне элементарно.

Итак, мы предполагаем, что

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t),$$

где $\mathbf{r}$ — координатный вектор материальной точки, $\mathbf{r}'$ — ее относительная скорость. Имея целью получить дифференциальные уравнения движения нашей точки, так сказать, в квази-лагранжевом виде, образуем ее живую силу:

$$T = {}^1/_2\, m (\mathbf{r}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r})^2 = {}^1/_2\, m\, [\mathbf{r}'^2 + (\vec{\omega} \times \mathbf{r})^2 + 2\mathbf{r}' \cdot (\vec{\omega} \times \mathbf{r})],$$

или, в составляющих $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{\omega}(p, q, r)$:

$$T = {}^1/_2\, m\, [x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + (qx_3 - rx_2)^2 + (rx_1 - px_3)^2 + (px_2 - qx_1)^2 + \\ + 2x_1'(qx_3 - rx_2) + 2x_2'(rx_1 - px_3) + 2x_3'(px_2 - qx_1)]\,.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} = mx_1' + m\,(qx_3 - rx_2) + \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x_1'} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_1'} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1'}.$$

Но

$$\frac{\partial T}{\partial p} = -m(rx_1 - px_3)x_3 + m(px_2 - qx_1)x_2 - mx_2'x_3 + mx_3'x_2,$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial p} = x_2[mx_3' + m(px_2 - qx_1)] - x_3[mx_2' + m(rx_1 - px_3)],$$

или, наконец,

$$\frac{\partial T}{\partial p} = x_2G_3 - x_3G_2 = (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_1.$$

Для $\frac{\partial T}{\partial q}$ и $\frac{\partial T}{\partial r}$ имеем, соответственно:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_2, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_3.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial T}{\partial x_1'} = G_1 + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_1\frac{\partial p}{\partial x_1'} + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_2\frac{\partial q}{\partial x_1'} + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_3\frac{\partial r}{\partial x_1'}.$$

По аналогии можем написать:

$$\frac{\partial T}{\partial x_2'} = G_2 + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_1\frac{\partial p}{\partial x_2'} + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_2\frac{\partial q}{\partial x_2'} + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_3\frac{\partial r}{\partial x_2'},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_3'} = G_3 + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_1\frac{\partial p}{\partial x_3'} + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_2\frac{\partial q}{\partial x_3'} + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_3\frac{\partial r}{\partial x_3'}.$$

Разрешая три последних уравнения относительно G_1, G_2, G_3, получим, очевидно, что вектор $\mathbf{G}$ есть линейная векторная функция вектора $\left(\frac{\partial T}{\partial x_1'}, \frac{\partial T}{\partial x_2'}, \frac{\partial T}{\partial x_3'}\right)$:

$$G_1 = R_{11}\frac{\partial T}{\partial x_1'} + R_{12}\frac{\partial T}{\partial x_2'} + R_{13}\frac{\partial T}{\partial x_3'},$$

$$G_2 = R_{21}\frac{\partial T}{\partial x_1'} + R_{22}\frac{\partial T}{\partial x_2'} + R_{23}\frac{\partial T}{\partial x_3'},$$

$$G_3 = R_{31}\frac{\partial T}{\partial x_1'} + R_{32}\frac{\partial T}{\partial x_2'} + R_{33}\frac{\partial T}{\partial x_3'}.$$

Если $\vec{\omega}$ не зависит от $\mathbf{r}'$, то тензор (R_{ij}) обращается в единицу, и мы имеем

$$G_i = \frac{\partial T}{\partial x_i'}.$$

Образуем теперь $\frac{\partial T}{\partial x_1}$:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = m(rx_1 - px_3)r - m(px_2 - qx_1)q + mrx_2' - mqx_3' + \\ + \frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial x_1} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = -(\vec{\omega}\times\mathbf{G})_1 + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_1\frac{\partial p}{\partial x_1} + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_2\frac{\partial q}{\partial x_1} + (\mathbf{r}\times\mathbf{G})_3\frac{\partial r}{\partial x_1}.$$

По аналогии можем написать выражения для $\frac{\partial T}{\partial x_2}$ и $\frac{\partial T}{\partial x_3}$. Отсюда получаем выражение для вектора $\vec{\omega} \times \mathbf{G}$.

Сопоставляем теперь левую часть дифференциальных уравнений движения $\mathbf{G}' + \vec{\omega} \times \mathbf{G}$; имеем:

$$\left(R_{11}\frac{\partial T}{\partial x_1'} + R_{12}\frac{\partial T}{\partial x_2'} + R_{13}\frac{\partial T}{\partial x_3'}\right)' - \frac{\partial T}{\partial x_1} + (\mathbf{r} \times \mathbf{G})_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + (\mathbf{r} \times \mathbf{G})_2 \frac{\partial q}{\partial x_1} + (\mathbf{r} \times \mathbf{G})_3 \frac{\partial r}{\partial x_1}$$

и два аналогичных выражения. Приравняв эти выражения проекциям силы на оси вращающейся координатной системы X, Y, Z, получим наши дифференциальные уравнения движения. Как мы уже говорили: если угловая скорость $\vec{\omega}$ не зависит от относительной скорости $\mathbf{r}'$, а зависит только от t и $\mathbf{r}$, то тензор (R_{ij}) обращается в единицу, и наши уравнения — частный случай уравнений для квази-координат Больтцманна. Вместо членов $\left(\frac{\partial T}{\partial x_l'}\right)'$ появляются $\left(R_{l1}\frac{\partial T}{\partial x_1'} + R_{l2}\frac{\partial T}{\partial x_2'} + R_{l3}\frac{\partial T}{\partial x_3'}\right)'$ потому, что наши квази-скорости, вводимые формулами

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' + \vec{\omega} \times \mathbf{r},$$

причем $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, приводят к рассмотрению нового типа квази-координат. Рассмотренным ранее типом будет только случай $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t, \mathbf{r})$.

Введенное обобщение — зависимость $\vec{\omega}$ от $\mathbf{r}'$ — вполне естественно. Наглядную картину мы получим, если представим себе, что наши координатные оси неизменно связаны с самолетом, причем летчик вращает его сообразно показаниям часов, а также сообразно относительному положению и относительной скорости другого (точечного!) самолета.

Наконец, следует упомянуть, что наши рассмотрения тесно связаны со всякой попыткой обобщения так называемой теоремы Лармора.

Поступило
16 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Крутков, Изв. АН СССР, Отд. физ.-мат. наук, № 6—7, 549 (1928).