Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

В. А. РОХЛИН

ВНУТРЕННИЕ ГОМОЛОГИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 II 1953)

Известно, что всякая ориентированная замкнутая поверхность способна служить границей ориентированного трехмерного многообразия. В моих заметках ([1,2]) показано, что всякое ориентированное замкнутое трехмерное многообразие способно служить границей ориентированного четырехмерного многообразия, и дано гомологическое условие, необходимое и достаточное для того, чтобы ориентированное замкнутое четырехмерное многообразие способно было служить границей ориентированного пятимерного многообразия. В настоящей работе эти исследования продолжаются. Работа может читаться и независимо от заметок ([1,2]): основные определения даны в ней заново, а прежние результаты перечислены. Гомологии между многообразиями, определенные в заметке ([2]), называются здесь **внутренними**. Под многообразием всегда понимается гладкое компактное многообразие — замкнутое или с краем.

n°1. Группы $\mathfrak{O}^k$ и $\mathfrak{N}^k$. Каждому ориентированному многообразию M^k отвечает противоположно ориентированное многообразие $-M^k$, и каждым двум ориентированным многообразиям M^k и N^k отвечает их сумма M^k+N^k, составленная из непересекающихся экземпляров многообразий M^k и N^k, и их разность $M^k-N^k=M^k+(-N^k)$. Мы говорим, что ориентированное многообразие M^k **внутренне гомологично нулю**, и пишем $M^k\sim 0$ (вн), если существует сохраняющий ориентацию гладкий гомеоморфизм между M^k и границей некоторого ориентированного многообразия M^{k+1}. Мы говорим, что ориентированные замкнутые многообразия M^k и N^k **внутренне гомологичны между собой**, и пишем $M^k\sim N^k$ (вн), если $M^k-N^k\sim 0$ (вн). Классы внутренне гомологичных между собой ориентированных замкнутых k-мерных многообразий естественно образуют аддитивную группу — **k-мерную группу внутренних гомологий**, — которую мы обозначаем через $\mathfrak{O}^k$.

Отбросим теперь ориентации. Если неориентированное (ориентируемое или нет) многообразие M^k гладко гомеоморфно границе некоторого многообразия M^{k+1}, то мы говорим, что M^k внутренне гомологично нулю mod 2, и пишем $M^k\sim 0 \bmod 2$ (вн). Каждым двум многообразиям M^k и N^k отвечает сумма M^k+N^k, и если $M^k+N^k\sim 0 \bmod 2$ (вн), то мы говорим, что M^k и N^k внутренне гомологичны между собой mod 2, и пишем: $M^k\sim N^k \bmod 2$ (вн). Классы внутренне гомологичных между собой mod 2 замкнутых k-мерных многообразий образуют **k-мерную** группу внутренних гомологий mod 2, которую мы обозначаем через $\mathfrak{N}^k$. Все ненулевые элементы этой группы имеют, очевидно, порядок 2.

п°2. Связь с характеристическими циклами. Инварианты. Под характеристическими Δ-классами (циклами) ориентированного замкнутого многообразия мы понимаем всевозможные целочисленные линейные комбинации его целочисленных характеристических Δ-классов (циклов) в смысле Понтрягина ([3–5]) за исключением эйлеровой характеристики; определенные так характеристические Δ-классы образуют характеристическое кольцо. Под характеристическими Δ-классами (циклами) неориентированного замкнутого многообразия мы понимаем его характеристические Δ-классы (циклы) mod 2 в смысле Черна ([6]); эти характеристические Δ-классы также образуют кольцо, называемое характеристическим. Оказывается, что все характеристические Δ-циклы ориентированного многообразия M^k, внутренне гомологичного нулю, гомологичны нулю во всяком ориентированном многообразии M^{k+1}, для которого M^k служит границей. Подобным же образом, все характеристические Δ-циклы неориентированного многообразия M^k, внутренне гомологичного нулю mod 2, гомологичны нулю во всяком многообразии M^{k+1}, для которого M^k служит границей.

Слегка видоизменяя определение Понтрягина, мы называем (целочисленные) индексы нульмерных характеристических Δ-классов ориентированного замкнутого многообразия его характеристическими числами, а индексы (mod 2) нульмерных характеристических Δ-классов неориентированного замкнутого многообразия характеристическими вычетами. Из изложенного выше следует, что все характеристические числа ориентированного многообразия, внутренне гомологичного нулю, равны нулю, и что все характеристические вычеты неориентированного многообразия, внутренне гомологичного нулю mod 2, равны нулю. К этой теореме, принадлежащей во всем существенном Понтрягину ([3]), следует добавить, что при сложении многообразий характеристические числа и вычеты складываются. Таким образом, они являются инвариантами классов внутренних гомологий и определяют гомоморфизмы групп $\mathfrak{O}^k$ и $\mathfrak{N}^k$ соответственно в группу целых чисел и в группу вычетов mod 2.

Заметим, что характеристические числа имеются только у многообразий, размерность которых делится на четыре. Для таких многообразий известен еще один инвариант классов внутренних гомологий — сигнатура ([2]). Именно, обозначим через (x, y) индекс пересечения целочисленных $2m$-мерных Δ-классов x, y ориентированного замкнутого многообразия M^{4m}. Сигнатурой $\sigma(M^{4m})$ многообразия M^{4m} называется сигнатура целочисленной квадратичной формы (x, x), определенной на $2m$-мерной группе Бетти многообразия M^{4m}. Оказывается ([2]), что если $M^{4m} \sim 0$ (вн), то $\sigma(M^{4m}) = 0$. Так как $\sigma(M_1^{4m} \pm M_2^{4m}) = \sigma(M_1^{4m}) \pm \sigma(M_2^{4m})$, то сигнатура также определяет гомоморфизм группы $\mathfrak{O}^{4m}$ в группу целых чисел.

Известно ([6]), что характеристическое кольцо неориентированного многообразия порождается характеристическими классами Штифеля. Поскольку последние эффективно вычислены ([7]), само это кольцо и, в частности, все характеристические вычеты также могут считаться эффективно вычисленными. Напротив, характеристическое кольцо ориентированного многообразия и, в частности, характеристические числа не вычислены, и даже их топологическая инвариантность не доказана. Единственное исключение составляет характеристическое число четырехмерного многообразия: доказано, что оно равно утроенной сигнатуре ([2]).

n°3. Гомоморфизм h^k. Если лишить ориентированное многообразие M^k его ориентации, то получится неориентированное многообразие, которое мы обозначим через $h^k(M^k)$. Очевидно, $h^k(M^k \pm N^k) = h^k(M^k) + h^k(N^k)$, и если $M^k \sim N^k$ (вн), то $h^k(M^k) \sim h^k(N^k) \bmod 2$ (вн). Таким образом, отображение h^k порождает гомоморфизм группы $\mathfrak{O}^k$ в группу $\mathfrak{N}^k$. Этот гомоморфизм мы также обозначим через h^k. Нижеследующие теоремы I, II определяют ядро гомоморфизма h^k и образ $h^k(\mathfrak{O}^k)$.

I. *Ядро гомоморфизма* h^k *есть* $2\mathfrak{O}^k$, *так что подгруппа* $h^k(\mathfrak{O}^k)$ *группы* $\mathfrak{N}^k$ *изоморфна фактор-группе* $\mathfrak{O}^k / 2\mathfrak{O}^k$.

II. *Пусть* M^k — *неориентируемое замкнутое многообразие. Пусть* A^{k-1} — *его ориентированное замкнутое подмногообразие, служащее его* $(k-1)$*-мерным (целочисленным) характеристическим* Δ*-циклом Штифеля. Пусть, далее,* B^{k-2} — *замкнутое подмногообразие многообразия* A^{k-1}, *служащее* $(k-2)$*-мерным характеристическим* Δ*-циклом* $\bmod 2$ *подмногообразия* A^{k-1} *относительно* M^k, *т. е. циклом особенностей внешнего векторного поля на* A^{k-1} *в* M^k. *Заметим, что такие подмногообразия* A^{k-1} *и* B^{k-2} *всегда существуют. Оказывается, что многообразие* M^k *в том и только в том случае внутренне гомологично* $\bmod 2$ *некоторому ориентируемому* k*-мерному многообразию, если* $A^{k-1} \sim 0$ (вн) *и* $B^{k-2} \sim 0 \bmod 2$ (вн).

n°4. Проективные пространства. Из теоремы II следует (индуктивно), что действительное проективное пространство P^{2r} четной размерности $2r$ не может быть внутренне гомологично $\bmod 2$ никакому ориентируемому многообразию. Другое доказательство: обозначим через $\psi(M^k)$ характеристический вычет замкнутого многообразия M^k, равный индексу k-кратного самопересечения $(k-1)$-мерного характеристического Δ-цикла Штифеля этого многообразия; так как $\psi(P^{2r}) = 1$, а для ориентируемого многообразия M^{2r} имеем $\psi(M^{2r}) = 0$, то $P^{2r} \not\sim M^{2r} \bmod 2$ (вн).

Комплексное проективное пространство Q^{4r} четной комплексной размерности $2r$, будучи ориентировано, порождает бесконечную циклическую подгруппу группы $\mathfrak{O}^{4r}$. Действительно, его сигнатура равна единице.

Можно показать, что как-либо ориентированное действительное проективное пространство нечетной размерности внутренне гомологично нулю. Точно так же, как-либо ориентированное комплексное проективное пространство нечетной комплексной размерности внутренне гомологично нулю.

n°5. Многообразия младших размерностей. Из элементарных соображений следует, что группы $\mathfrak{O}^1$, $\mathfrak{N}^1$, $\mathfrak{O}^2$ тривиальны, а группа $\mathfrak{N}^2$ состоит из двух элементов и порождается проективной плоскостью P^2: если эйлерова характеристика замкнутого многообразия M^2 четна, то $M^2 \sim 0 \bmod 2$ (вн), если она нечетна, то $M^2 \sim P^2 \bmod 2$ (вн). Из результатов моей заметки (1) следует, что группы $\mathfrak{O}^3$ и $\mathfrak{N}^3$ тривиальны. Заметим, что, в силу теоремы II, тривиальность группы $\mathfrak{N}^3$ следует из тривиальности групп $\mathfrak{O}^3$, $\mathfrak{O}^2$ и $\mathfrak{N}^1$. В силу результатов моей заметки (2), $\mathfrak{O}^4$ есть бесконечная циклическая группа, порождаемая комплексной проективной плоскостью Q^4. Именно, обозначим через sQ^4 многообразие, состоящее из s (непересекающихся между собой) экземпляров естественно ориентированного многообразия Q^4, если $s \geqslant 0$, и из $-s$ экземпляров многообразия $-Q^4$, если $s < 0$. Оказывается, что ориентированное замкнутое многообразие M^4 с сигнатурой $\sigma = \sigma(M^4)$ внутренне гомологично многообразию σQ^4.

Обратимся к группе $\mathfrak{N}^4$. В п° 3 заметки ([2]) ошибочно сказано, что она состоит из двух элементов. В действительности $\mathfrak{N}^4$ есть прямая сумма двух циклических групп второго порядка, порождаемых действительным проективным пространством P^4 и комплексной проективной плоскостью Q^4. Это нетрудно вывести из структуры групп $\mathfrak{O}^4$, $\mathfrak{O}^3$ и $\mathfrak{N}^2$ на основе теорем I и II. В частности, среди характеристических вычетов четырехмерных многообразий имеется только два независимых. Такими независимыми характеристическими вычетами являются, например, вычет $\psi = \psi(M^4)$, определенный в п° 4, и эйлерова характеристика $\chi = \chi(M^4)$, приведенная по модулю два. Каково бы ни было замкнутое многообразие M^4, мы имеем:

$$M^4 \sim \psi P^4 + (\psi + \chi)\, Q^4 \mod 2 \text{ (вн)}.$$

Например, для прямого произведения $P^2 \times P^2$ двух действительных проективных плоскостей имеем $\psi = 0$, $\chi = 1$. Следовательно $P^2 \times P^2 \sim Q^4 \mod 2$ (вн).

Группы $\mathfrak{O}^5$ и $\mathfrak{N}^5$ не вычислены. Однако из структуры групп $\mathfrak{O}^4$ и $\mathfrak{N}^3$ на основе теоремы II нетрудно вывести, что $\mathfrak{N}^5 = h^5(\mathfrak{O}^5)$, т. е. что всякое неориентируемое замкнутое пятимерное многообразие внутренне гомологично mod 2 некоторому ориентируемому замкнутому пятимерному многообразию.

О структуре дальнейших групп $\mathfrak{O}^k$, $\mathfrak{N}^k$ известно мало. Надо думать, что все они обладают конечными системами образующих. Из изложенного выше видно, что группа $\mathfrak{O}^{4r}$ содержит бесконечную циклическую подгруппу, порождаемую комплексным проективным пространством Q^{4r}, что группа $\mathfrak{N}^{4r}$ содержит прямое произведение двух подгрупп второго порядка, порождаемых действительным проективным пространством P^{4r} и комплексным проективным пространством Q^{4r}, и что группа $\mathfrak{N}^{4r-2}$ содержит подгруппу второго порядка, порождаемую действительным проективным пространством P^{4r-2}. Будут ли нетривиальны группы $\mathfrak{O}^{4r-2}$, $\mathfrak{O}^{2r+1}$, $\mathfrak{N}^{2r+1}$ при $r > 1$ — автору неизвестно.

Архангельский лесотехнический институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
3 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Рохлин, ДАН, 81, 35 (1951). [2] В. А. Рохлин, ДАН, 84, 221 (1952). [3] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 21, 233 (1947). [4] Л. С. Понтрягин, там же, 24, 129 (1949). [5] В. А. Рохлин, ДАН, 84, 449 (1952). [6] S. Chern, Ann. of Math., 49, 362 (1948). [7] Wu Wen-tsün, C. R., 230, 508 (1950).