Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 I 1953)

В настоящей работе используются определения и обозначения работы (1).

Определение 1. При $T \in \mathfrak{T}$ и $f \in \widetilde{L}$ положим

$$\sigma_T(f) \equiv \sigma_T(f, x) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, T(x-t)\, dt.$$

Очевидно, что $\sigma_T(f) \in \mathfrak{T}_{\Pi(T)}$.

Определение 2. Пусть E и $\mathcal{E}$ суть пространства типа $\widetilde{F}_6$ и пусть $T \in \mathfrak{T}$. Говорим, что U есть линейная тригонометрическая полиномиальная операция типа T из E в $\mathcal{E}$, если выполнены следующие условия:

1) U есть линейная операция из E в $\mathcal{E}$;
2) если $f \in E$, то $U(f) \in \mathfrak{T}_{\Pi(T)}$;
3) если $f \in \mathfrak{T}_{\Pi(T)}$, то $U(f) = \sigma_T(f)$.

Множество всех линейных тригонометрических полиномиальных операций типа T из E в $\mathcal{E}$ обозначим $\mathfrak{L}(T, E, \mathcal{E})$. Символ $U(f, x)$ означает значение, которое принимает функция $U(f)$ в точке x.

Замечание. Операция σ_T, сопоставляющая функции f тригонометрический полином $\sigma_T(f)$, сама принадлежит $\mathfrak{L}(T, E, \mathcal{E})$. Особенно важен случай, когда $T = D_n = n$-е ядро Дирихле. Тогда $\sigma_T(f) = s_n(f) = n$-я частная сумма ряда Фурье функции f.

Норму операции σ_T, рассматриваемой как линейная операция из E в $\mathcal{E}$, обозначим $\|\sigma_T\|_{\mathcal{E}}^{E}$. (В работе (2) употреблялось обозначение $\|\ \|_{E}^{\mathcal{E}}$. Настоящее обозначение более целесообразно.)

Определение 3. Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{T}$ называется допустимой, если для любого $f \in \mathfrak{T}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_{T_n}(f)\|_{C} = 0.$$

В приложениях $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ является обычно последовательностью ядер какого-нибудь метода суммирования ряда Фурье. Все встречающиеся в литературе последовательности таких ядер допустимы.

Теорема 1. *Пусть E и $\mathcal{E}$ суть пространства типа $\widetilde{F}_6$, $T \in \mathfrak{T}$, $U \in \mathfrak{L}(T, E, \mathcal{E})$. Тогда*

$$\|U\| \geqslant \|\sigma_T\|_{\mathcal{E}}^{E}.$$

Замечание. В случае, когда T есть четный тригонометрический полином, эта теорема указана в работе (2).

Теорема 2. *Пусть E и $\mathscr{E}$ суть пространства типа $\tilde{F}_6$, $T_n \in \mathfrak{T}_n$, $U_n \in \mathfrak{L}(T_n, E, \mathscr{E})$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, r — неотрицательное целое число, p — натуральное число, $\omega \in \Omega^*_{K,p}$, $\lim\limits_{u \to 0+} \frac{u^p}{\omega(u)} = 0$. Тогда*

I. *Если*

$$0 < L \equiv \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{n^r} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \|\sigma_{T_n}\|^E_{\mathscr{E}} \leqslant \infty,$$

то по любому $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in E^{(r)}$ такая, что:

1) $\|f\|_{\breve{C}} \leqslant \varepsilon$, $\|f^{(r)}\|_E \leqslant \varepsilon$;

2) $M_{p, \omega, f, \breve{C}} \leqslant 1$, $M_{p, \omega, f^{(r)}, E} \leqslant 1$;

3) *для любой функции* $\mathfrak{f} \in \mathscr{E}$

$$\varlimsup_{n \to \infty} \|\mathfrak{f} - U_n(f)\|_{\mathscr{E}} \geqslant \frac{L}{2^{p+3} K A^*},$$

где $A^* = A^*(E, r, p) > 0$.

II. *Если $E \overset{\subset}{t} \mathscr{E}$ и последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ допустима, то по любому $\varepsilon > 0$ и любой последовательности натуральных чисел Π найдется функция $f \in E^{(r)}$ такая, что:*

1) *и* 2) *как в* I;

3′) *для любой функции* $\mathfrak{f} \in \mathscr{E}$

$$\varlimsup_{\substack{n \to \infty \\ n \in \Pi}} \frac{\|\mathfrak{f} - U_n(f)\|_{\mathscr{E}}}{\frac{1}{n^r} \omega\left(\frac{1}{n}\right)} \geqslant \frac{A}{2^{p+4} K},$$

где $A = A(\mathscr{E}, E, r, p, K) > 0$.

Если названная Π такова, что

$$\varlimsup_{\substack{n \to \infty \\ n \in \Pi}} \|\sigma_{T_n}\|^E_{\mathscr{E}} = \infty$$

и

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \Pi}} \frac{1}{n^r} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \|\sigma_{T_n}\|^E_{\mathscr{E}} = 0,$$

то функция $f \in E^{(r)}$ может быть взята так, что выполнены 1), 2) *и* 3″) *для любой функции* $\mathfrak{f} \in \mathscr{E}$

$$\varlimsup_{\substack{n \to \infty \\ n \in \Pi}} \frac{\|\mathfrak{f} - U_n(f)\|_{\mathscr{E}}}{\frac{1}{n^r} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \|\sigma_{T_n}\|^E_{\mathscr{E}}} \geqslant \frac{1}{2^{p+4} K A^*}.$$

Замечание. Константы A и A^* зависят только от обозначенных у них аргументов и могут быть эффективно определены. Например:

при $r = 0$: $\quad A^* = 2^p \pi \sqrt{3}$;

при $E \equiv \mathscr{E} \equiv \breve{C}$: $\quad A = \frac{1}{2^{2p+r-1} K \pi}$;

при $E \equiv \breve{C}$, $\mathscr{E} \equiv \breve{L}$: $\quad A = \frac{1}{2^{2p+r-2} K}$;

при $E \equiv \mathscr{E} \equiv \breve{L}$: $\quad A = \frac{1}{2^{2p+r-1} K \pi}$.

Замечание. Частный случай теоремы 2, когда T_n суть четные тригонометрические полиномы, а $r=0$, рассматривался, в несколько других обозначениях, в ([2]).

Определение 4. Пусть E и $\mathscr{E}$ суть пространства типа $\tilde{F}_3$, U — линейная операция из E в $\mathscr{E}$. Говорим, что U есть **скользящая** операция, если

$$U(f^\alpha)=[U(f)]^\alpha \quad \text{при всех } f\in E,\ -\infty<\alpha<\infty.$$

Важнейший пример скользящей операции есть операция σ_T.

Теорема 3. *Пусть E — пространство типа $\tilde{F}_6$, $T_n\in\mathfrak{T}_n$, $U_n\in\mathfrak{L}(T_n,\ E,\ \tilde{C})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$, причем операции U_n скользящие; $r,\ p,\ \omega$ — как в теореме 2. Тогда, если*

$$0<L\equiv\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\|\sigma_{T_n}\|_{\tilde{C}}^{E}\leqslant\infty,$$

то по любому $\varepsilon>0$ найдется функция $f\in E^{(r)}$ такая, что:

1) и 2) как в теореме 2;

3) для любого числа λ, $-\infty<\lambda<\infty$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\lambda-U_n(f,\ 0)|\geqslant\frac{L}{2^{p+3}KA^*},$$

где A^* как в теореме 2.

Теорема 4. *Пусть $T_n\in\mathfrak{T}_n$, $U_n\in\mathfrak{L}(T_n,\ \tilde{C},\ \tilde{C})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ причем последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ допустима, а операции U_n скользящие; $r,\ p,\ \omega$ — как в теореме 2. Тогда по любому $\varepsilon>0$ и любой последовательности натуральных чисел Π найдется функция $f\in C^{(r}$ такая, что:*

1) $\|f\|_{\tilde{C}}\leqslant\varepsilon$, $\|f^{(r)}\|_{\tilde{C}}\leqslant\varepsilon$;

2) $M_{p,\,\omega,\,f,\,\tilde{C}}\leqslant 1$, $M_{p,\,\omega,\,f^{(r)},\,\tilde{C}}\leqslant 1$;

3) для любого числа λ, $-\infty<\lambda<\infty$,

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\Pi}}}\frac{|\lambda-U_n(f,\ 0)|}{\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)}\geqslant\frac{A}{2^{p+4}K},$$

где A как в теореме 2.

Если названная Π такова, что

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\Pi}}}\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(t)|\,dt=\infty$$

и

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\Pi}}\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(t)|\,dt=0,$$

то функция $f\in\tilde{C}^{(r)}$ может быть взята так, что выполнены 1), 2) и

3') для любого числа λ, $-\infty<\lambda<\infty$,

$$\overline{\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\Pi}}}\frac{|\lambda-U_n(f,\ 0)|}{\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_{-\pi}^{\pi}|T_n(t)|\,dt}\geqslant\frac{1}{2^{p+4}KA^*}.$$

Поступило
16 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Лозинский, ДАН, 89, № 4 (1953). [2] С. М. Лозинский, ДАН, 64, № 4 (1949).