Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

О ДВИЖЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 20 II 1953)

В этой заметке дается геометрическая характеристика максимально подвижных пространств аффинной связности A_n ненулевой кривизны без кручения, максимально подвижных пространств L_n полусимметрической связности (т. е. связности, обладающей тензором кручения вида $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\beta}\Omega_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\Omega_{\beta}$) и решается задача определения всех таких пространств. Рассматриваемые максимально подвижные пространства A_n и L_n характеризуются или транзитивными полными группами движений порядка n^2 или интранзитивными полными группами движений порядка $n^2 - 1$ [1,2].

1. Как известно [4], пространство A_n ненулевой кривизны является максимально подвижным тогда и только тогда, если оно проективно-евклидово и эквиаффинно, причем

$$R_{ij} = (1 - n)\,\varepsilon\lambda_i\lambda_j, \quad \varepsilon = \pm 1; \tag{1}$$

$$\lambda_{i,j} = a\lambda_i\lambda_j, \tag{2}$$

где R_{ij} — тензор Риччи; a — некоторая постоянная в случае транзитивных полных групп движений или функция от λ в случае интранзитивных полных групп движений; вектор λ_i — градиент функции λ.

Имеют место следующие предложения, выясняющие геометрический смысл уравнений (1), (2).

Теорема 1. *Проективно-евклидово пространство, допускающее по крайней мере одно поле абсолютно параллельных контравариантных векторов, необходимо является эквиаффинным.*

Теорема 2. *Пространство аффинной связности A_n ненулевой кривизны тогда и только тогда является максимально подвижным, когда оно проективно-евклидово и допускает точно $n - 1$ независимых полей абсолютно параллельных контравариантных векторов.*

Теорема 3. *Для всякого максимально подвижного пространства A_n ненулевой кривизны однопараметрическое семейство гиперповерхностей*

$$\lambda(x^1, x^2, \ldots, x^n) = C, \tag{3}$$

где C — параметр семейства, является системой импримитивности или интранзитивности полной группы движений, смотря потому, будет ли ее порядок n^2 или $n^2 - 1$.

Теорема 4. *Если A_n — максимально подвижное пространство ненулевой кривизны, то каждая гиперповерхность семейства гиперповерхностей (3) является вполне геодезической.*

Следовательно, существующее геодезическое отображение максимально подвижного пространства аффинной связности A_n ненулевой кривизны на евклидово пространство E_n переведет семейство гиперповерхностей (3) в семейство гиперплоскостей E_{n-1}. Нетрудно установить также, что существует некоторая $(n-2)$-мерная плоскости E_{n-2}, принадлежащая всякой гиперплоскости нашего семейства. Отсюда следует, что в проективно-декартовой системе координат уравнениям гиперплоскостей системы импримитивности (интранзитивности) можно придать такой вид, при котором функция λ зависит лишь от одной координаты, например от x^1:

$$\lambda(x^1) = C.$$

Таким образом, кооординаты градиентного вектора $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$, $\lambda_1 = d\lambda / dx^1 \neq 0$. Система дифференциальных уравнений (1) и (2), определяющая ненулевой вектор связности $\psi_i = \partial\psi / \partial x^i$, и вектор λ_i, дает в этом случае:

$$\psi_2 = \psi_3 = \ldots = \psi_n = 0,$$

$$\frac{d^2\psi}{(dx^1)^2} + \left(\frac{d\psi}{dx^1}\right)^2 = \varepsilon\left(\frac{d\lambda}{dx^1}\right)^2,$$

$$\frac{d^2\lambda}{(dx^1)^2} + 2\frac{d\lambda}{dx^1}\frac{d\psi}{dx^1} = a\left(\frac{d\lambda}{dx^1}\right)^2.$$

Общими решениями этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно ψ_1, λ_1 (исключая на время случаи, когда ψ_1, или λ_1, или их отношение — постоянные) с точностью до линейного преобразования переменной x^1 являются

$$\psi_1 = \frac{x^1 - a\varepsilon_1}{(x^1)^2 + 4\varepsilon - a^2}, \quad \lambda_1 = \frac{-2\varepsilon_1}{(x^1)^2 + 4\varepsilon - a^2} \quad (\varepsilon_1 = \pm 1), \tag{4}$$

$$\psi_2 = \ldots = \psi_n = 0, \quad \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

Если максимально подвижное пространство несимметрическое $(a \neq 0)$, то координатам этих векторов можно придать вид:

$$\psi_1 = \frac{x^1 + 1}{(x^1)^2 + b}, \quad \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0,$$

$$\lambda_1 = \pm\frac{\sqrt{\varepsilon(b+1)}}{(x^1)^2 + b}, \quad \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \quad (b \neq -1).$$

Рассмотрение исключительных случаев приводит к пространствам аффинной связности, векторы связности которых будут

$$\psi_1 = 1, \quad \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0$$

или

$$\psi_1 = \frac{k}{x^1}, \quad \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0.$$

Однако первое пространство совпадает с пространством общего случая при $b = 0$, а пространства второй совокупности (дважды здесь записанные) эквивалентны пространствам, составляющим лишь часть пространств общего случая.

Теорема 5. *Коэффициенты связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ максимально подвижного пространства A_n ненулевой кривизны с транзитивной группой движения всегда можно привести к виду*

$$^1/_2\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = \ldots = \Gamma^n_{n1} = -\frac{x^1}{(x^1)^2 + 4\varepsilon},$$

где A_n — симметрическое пространство, или к виду

$$^1/_2\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = \ldots = \Gamma^n_{n1} = -\frac{x^1+1}{(x^1)^2+b},$$

другие коэффициенты связности равны нулю, b — некоторая постоянная.

Всякое пространство A_n, коэффициенты связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ которого определяются этими формулами, где b — любая постоянная $\neq -1$, является максимально подвижным пространством.

Теорема 6. *Группы движений максимально подвижных пространств аффинной связности A_n ненулевой кривизны совпадают с проективными преобразованиями обычного пространства, оставляющими на месте поверхность (абсолют):*

$$(x^1)^2 + b = 0.$$

Теорема 7. *Коэффициенты связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ максимально подвижного пространства аффинной связности A_n ненулевой кривизны с интранзитивной полной группой движений всегда можно привести к виду*

$$^1/_2\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{21} = \ldots = \Gamma^n_{n1} = \alpha(x^1),$$

где α — некоторая функция от x^1, другие $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$.

В роли абсолюта в этом случае можно взять любую гиперплоскость из системы интранзитивности.

Теорема 8. *Максимальный порядок интранзитивных полных групп движений пространства аффинной связности A_n, непосредственно предшествующий порядку n^2-1 групп движений максимально подвижных пространств с интранзитивной группой, точно равен n^2-n.*

2. Отметим также, что всякое максимально подвижное пространство аффинной связности A_n ненулевой кривизны (с транзитивной или интранзитивной группой движений) может быть реализовано в E_{n+1} в виде гиперповерхности. определенной радиусом-вектором

$$\mathrm{R}\left(x^1,\ e^{x^1},\ x^2 e^{\int \alpha(x^1)\,dx^1}, \ldots, x^n e^{\int \alpha(x^1)\,dx^1}\right),$$

нормализация которой задается вектором

$$\mathrm{N}\left(-\frac{2\alpha}{\frac{d\alpha}{dx^1}-\alpha^2},\ \frac{1-2\alpha}{\frac{d\alpha}{dx^1}-\alpha^2},\ x^2 e^{\int \alpha(x^1)\,dx^1}, \ldots, x^n e^{\int \alpha(x^1)\,dx^1}\right).$$

3. В случае максимально подвижных пространств полусимметрической связности L_n подлежащие определению координаты вектора ψ_i (мы будем называть его вектором связности пространства L_n) сопутствующей связности $L^\alpha_{(\beta\gamma)} = -\delta^\alpha_\beta\psi_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\psi_\beta$ и координаты вектора кручения Ω_i являются решениями системы

$$\partial_{\alpha\beta}\psi = -\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi + C_1\partial_\alpha\Omega\partial_\beta\Omega,$$

$$\partial_{\alpha\beta}\Omega = -\partial_\alpha\psi\partial_\beta\Omega - \partial_\beta\psi\partial_\alpha\Omega + C_2\partial_\alpha\Omega\partial_\beta\Omega,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные или зависят от Ω ($\Omega_i = \partial_i\Omega$).

Теорема 9. *Векторы связности и кручения максимально подвижного пространства полусимметрической связности, для которой сопутствующая связность евклидова, можно привести к виду*

$$\psi_1 = \ldots = \psi_n = 0, \quad \Omega_1 = 1, \quad \Omega_2 = \ldots = \Omega_n = 0$$

или

$$\psi_1 = \ldots = \psi_n = 0, \qquad \Omega_1 = \frac{k}{x^1}, \ \Omega_2 = \ldots = \Omega_n = 0.$$

Если сопутствующая связность ненулевой кривизны, то ее вектор связности ψ_i и вектор кручения пространства Ω_i выражаются формулами (4). *Справедливы обратные предложения.*

Векторы ψ_i, Ω_i, определенные формулами (4), при $a = 0$ дают симметрические в смысле П. К. Рашевского максимально подвижные пространства ([3]).

Теорема 10. *Максимальный порядок интранзитивных полных групп движений пространств аффинной связности с кручением равен точно $n^2 - 1$. Вектор сопутствующей связности ψ_i и вектор кручения Ω_i всегда можно привести к виду*

$$\psi_1 = \alpha(x^1), \quad \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0,$$

$$\Omega_1 = \beta(x^1), \ \Omega_2 = \ldots = \Omega_n = 0,$$

где α, β — некоторые функции от x^1.

Обратно, всякое пространство, коэффициенты связности $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ которого определяются этими векторами ψ_i и Ω_i, обладает интранзитивной полной группой движений порядка $n^2 - 1$ или транзитивной полной группой движений порядка n^2.

Теорема 11. *Максимальный порядок транзитивных групп движений пространств аффинной связности L_n ненулевого кручения, непосредственно предшествующий порядку n^2 групп движений максимально подвижных пространств полусимметрической связности, равен точно $n^2 - n + 1$. В случае интранзитивных групп движений имеет место теорема, аналогичная теореме* 8.

4. Существует лишь одно при данном n максимально подвижное пространство L_n групповой связности. В терминах теории групп этот факт может быть сформулирован таким образом: существует одна и только одна с точностью до подобия просто транзитивная неабелева группа $\mathfrak{G}_n$ заданного порядка n, каждая пара операторов которой дает двухчленную подгруппу. Группа движений соответствующего пространства L_n является нормализатором группы $\mathfrak{G}_n$ ([5])*. В качестве базисных операторов группы $\mathfrak{G}_n$ можно взять, например,

$$4x^1p_1 + x^1x^kp_k, \quad x^1p_2, \ x^1p_3, \ \ldots, \ x^1p^n.$$

5. В случае максимально подвижных пространств аффинной общей неполусимметрической связности Λ_n сопутствующее пространство — евклидово, и вопрос о нахождении Λ_n сводится к отысканию тензора кручения $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$, допускающего аффинную подгруппу точно порядка $n^2 - 2n + 6$.

В заключение автор выражает благодарность проф. П. К. Рашевскому за обсуждение результатов этой статьи.

Поступило
17 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Егоров, ДАН, 57, № 9 (1947). [2] И. П. Егоров, ДАН, 87, № 5 (1952). [3] П. К. Рашевский, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 8 (1950). [4] И. П. Егоров, ДАН, 84, № 2 (1952). [5] П. К. Рашевский, ДАН, 80, № 2 (1951).

* Отсюда непосредственно получаем следующий вывод: максимальный порядок нормализатора r-членной неабелевой группы Ли равен точно r^2. Эта высшая граница достигается, как указано выше, лишь одной группой; непосредственно предшествующими порядками нормализаторов будут $r^2 - r + 1$, $r^2 - 2r + 6$.