Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 5

МАТЕМАТИКА

Д. П. ГРОССМАН

# О ФОРМУЛАХ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 II 1953)*

Мы будем рассматривать формулы численного дифференцирования без разностей, имеющие вид

$$h^k f^{(k)}(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k)} f(a + t_i h) + R_k^{(n)}, \quad 0 < k < n, \tag{1}$$

с целью указать зависимость остаточного члена $R_k^{(n)}$ от $h, t_1, t_2, \ldots, t_n$, а также выражение коэффициентов $c_i^{(k)}$ через $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

В одной из своих работ ([1]) Ш. Е. Микеладзе замечает, что «эти формулы принимают особенно простой вид, когда точки $a_i = a + t_i h$ симметричны относительно точки, в которой отыскиваются производные», и находит их в этом предположении. Его метод, вообще говоря, может быть использован для получения формул (1) при произвольном расположении точек $a_i$, однако он приводит к громоздким выкладкам и не совсем удобному выражению для остаточного члена.

Ниже приводятся другое выражение для остаточного члена $R_k^{(n)}$ и выражения для коэффициентов $c_i^{(k)}$, полученные другим методом для случая произвольного расположения точек $a_i$.

Обозначим через $\sigma_i^n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $i$-ю элементарную симметрическую функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. сумму произведений всевозможных сочетаний по $i$ из $n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для краткости $\sigma_i^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ будем обозначать также через $\sigma_i$. Условимся считать $\sigma_0 = 1$ и $\sigma_i = 0$ при целом $i > n$. Значения $t_1, t_2, \ldots, t_n$ в формуле (1) будем считать различными.

Теорема 1. *Если функция $f(z)$ аналитическая в круге $K(r; a)$ радиуса $r$ с центром в точке $z = a$ (для $a$ и $t_i$ в этом случае допускаются комплексные значения), то при действительных значениях $h$, удовлетворяющих неравенствам $h < \left|\frac{a}{t_i}\right|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, имеет место формула* (1), *в которой*

$$c_i^{(k)} = (-1)^k k! \frac{\sigma_{n-k-1}^{n-1}(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)}{\prod\limits_{j \neq i} (t_j - t_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

*и*

$$R_k^{(n)} = (-1)^{n+k} k! \sum_{m=1}^{\infty} d_m^{(k)} \frac{h^{n-1+m} f^{(n-1+m)}(a)}{(n-1+m)!}, \tag{3}$$

*причем*

$$d_1^{(k)} = \sigma_{n-k},$$

$$d_m^{(k)} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m-1} & \sigma_{m-2} & \sigma_{m-3} & \dots & 1 \\ \sigma_{n-k+m-1} & \sigma_{n-k+m-2} & \sigma_{n-k+m-3} & \dots & \sigma_{n-k} \end{vmatrix} \quad \text{при } m > 1. \qquad (4)$$

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ определена для действительных значений $x$ в окрестности точки $x = a$ и имеет в этой окрестности $l \geqslant n$ производных (в этом случае числа $a$ и $t_i$ надо считать действительными), то при достаточно малых по модулю значениях $h$ формула (1) также справедлива, если коэффициенты $c_i^{(k)}$ определяются формулой (2), а остаточный член — формулой:*

$$R_k^{(n)} = (-1)^{n+k}\, k! \sum_{m=1}^{l-n} d_m^{(k)} \frac{h^{n-1+m}}{(n-1+m)!} f^{(n-1+m)}(a) -$$

$$- \frac{h^l}{l!} \sum_{i=1}^{n} c_i^{(k)} t_i^l f^{(l)}(\xi_i), \qquad \xi_i \in (a, a_i) \qquad (5)$$

(*при $l = n$ в правой части этой формулы надо оставить лишь второй член*).

Замечание. Указанные формулы сохраняют силу и для $k = 0$ если в них $0!$ заменить единицей. В этом случае формула (1) превращается в интерполяционную формулу

$$f(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(0)} f(a + t_i h) + R_0^{(n)} \qquad (1')$$

с известными значениями коэффициентов $c_i^{(0)}$:

$$c_i^{(0)} = \frac{\sigma_{n-1}^{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)}{\prod\limits_{j \neq i} (t_j - t_i)} \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (2')$$

и следующими выражениями для $d_m^{(0)}$ в формулах (3) и (5):

$$d_1^{(0)} = \sigma_n,$$

$$d_m^{(0)} = \sigma_n \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \dots & 0 \\ \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{m-2} & \sigma_{m-3} & \sigma_{m-4} & \dots & 1 \\ \sigma_{m-1} & \sigma_{m-2} & \sigma_{m-3} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix} \quad \text{при } m > 1. \qquad (4')$$

Приведенные выражения для остаточного члена $R_k^{(n)}$ позволяют сделать следующие выводы:

1. Если в интерполяционной формуле (1′) все $t_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ отличны от нуля, то остаточный член $R_0^{(n)}$ имеет в общем случае по-

рядок малости $n$ относительно $h$. Если одно из чисел $t_i$ равно нулю, то эта формула превращается в тривиальное тождество $f(a) = f(a)$,

2. Для того чтобы остаточный член $R_k^{(n)}$ при $k > 0$ имел в общем случае порядок малости $n + m$ $(m > 0)$ относительно $h$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sigma_{n-k} = 0, \quad \sigma_{n-k+1} = 0, \ldots, \sigma_{n-k+m-1} = 0. \tag{6}$$

3. При $m = 1$ условия (6) превращаются в одно уравнение

$$\sigma_{n-k} = 0, \tag{7}$$

которое имеет бесконечное множество решений, состоящих из различных действительных значений $t_i$. Если выбирать числа $t_i$ так, как это делает Ш. Е. Микеладзе ([1]), то они будут удовлетворять уравнению (7), а наши формулы (2) для коэффициентов $c_i^{(k)}$ совпадут с соответствующими формулами Ш. Е. Микеладзе. Однако уравнению (7) можно удовлетворить и при ином выборе чисел $t_i$. Если $n = 3$, $k = 1$, то уравнение (7) имеет, например, решение $t_1 = 3$, $t_2 = 6$, $t_3 = -2$, которое дает приближенную формулу

$$hf'(a) \approx \frac{4}{15} f(a + 3h) - \frac{1}{24} f(a + 6h) - \frac{9}{40} f(a - 2h) - \frac{3}{2} h^4 f^{\mathrm{IV}}(a) \tag{8}$$

с остаточным членом порядка $n + m = 4$.

4. Если $1 < m < k + 1$, условия (6) могут быть выполнены лишь в том случае, если среди значений $t_i$ будут встречаться комплексные, так как $t_i$ должны будут удовлетворять уравнению $n$-й степени с одним неизвестным, в котором по крайней мере два соседних коэффициента будут равны нулю ([2]).

Если $k = n - 1$, $m = n - 1$, условия (6) превращаются в уравнения

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0, \ldots, \sigma_{n-1} = 0$$

и будут, например, удовлетворены, если в качестве $t_i$ взять корни $n$-й степени из единицы, т. е. положить

$$t_\nu = \varepsilon_{\nu-1}^n = \cos\frac{2\pi(\nu - 1)}{n} + i \sin\frac{2\pi(\nu - 1)}{n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

В этом случае получим

$$h^{n-1} f^{(n-1)}(a) \approx$$

$$\approx (-1)^{n-1}(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a + \varepsilon_i^n h)}{\prod\limits_{j \neq i} (\varepsilon_j^n - \varepsilon_i^n)} - \frac{h^{2n-1}}{n(n+1)\ldots(2n-1)} f^{(2n-1)}(a).$$

5. Порядок малости остаточного члена $R_k^{(n)}$ формулы (1) относительно $h$ не может быть сделан в общем случае большим, чем $n + k$.

Поступило
18 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Е. Микеладзе, Усп. матем. наук, 3, в. 6 (1948). [2] А. К. Сушкевич, Основы высшей алгебры, М. — Л., 1941, стр. 151.