

Член-корреспондент АН СССР И. Н. ВЕКУА

**ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ, ДОПУСКАЮЩИХ ПРОИЗВОДНЫЕ В СМЫСЛЕ С. Л. СОБОЛЕВА, И ПРОБЛЕМА ПРИМИТИВНЫХ**

В настоящей работе указывается оператор, дающий общее представление класса функций двух независимых переменных, допускающих производные в смысле С. Л. Соболева (1). Полученная формула решает определенную проблему о примитивных для суммируемых функций двух переменных.

1. Пусть  $T$  — ограниченная многосвязная область, граница которой состоит из конечного числа спрямляемых кривых Жордана. Пусть  $L$  — граница  $T$ , а  $T^*$  — замыкание  $T$ , т. е.  $T^* = T + L$ .

Обозначим через  $C^k(T)$  множество непрерывных в  $T$  функций точки  $z = x + iy$ , имеющих непрерывные в  $T$  частные производные относительно  $x$  и  $y$  порядка  $\leq k$ . Функции множества  $C^k(T)$  могут принимать и комплексные значения. Множество непрерывных в  $T$  функций ( $k=0$ ) будем обозначать просто через  $C(T)$ . Пусть  $C_0^k(T)$  обозначает такое подмножество множества  $C^k(T)$ , элементы которого вместе со своими частными производными порядка  $\leq k-1$  обращаются в нуль на границе  $L$  области  $T$ . Через  $L_p(T)$  ( $p \geq 1$ ) будем обозначать множество функций  $f(z)$ , для которых

$$\iint_T |f(z)|^p dT < \infty \quad (L_1(T) \equiv L(T)).$$

2. В классе функций  $C^1(T)$  можно рассмотреть следующие операторы комплексного дифференцирования:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (1)$$

Если  $u \in C^1(T)$  и  $v \in C_0^1(T)$ , то, очевидно,

$$\iint_T \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} v dT + \iint_T u \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} dT = 0, \quad \iint_T \frac{\partial u}{\partial z} v dT + \iint_T u \frac{\partial v}{\partial z} dT = 0. \quad (2)$$

При помощи равенств (2), следуя С. Л. Соболеву (1), мы можем операторы (1) обобщить и на случай суммируемых функций.

Пусть  $u$  — суммируемая в  $T$  функция,  $u \in L(T)$ . Определим  $du / d\bar{z} = \omega(z)$  ( $du / dz = \chi(z)$ ) как такую суммируемую в  $T$  функцию, которая для любой  $v \in C_0^1(T)$  удовлетворяет равенству

$$\iint_T \omega v dT + \iint_T u \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} dT = 0 \quad \left( \iint_T \chi v dT + \iint_T u \frac{\partial v}{\partial z} dT = 0 \right). \quad (3)$$

Функцию  $\omega$  (функцию  $\chi$ ), если она существует, будем называть производной в смысле С. Л. Соболева от  $u(z)$  относительно  $\bar{z}$  (относительно  $z$ ) в области  $T$ , а функцию  $u(z) - \bar{z}$ -примитивной функции  $\omega(z)$  ( $z$ -примитивной функции  $\chi(z)$ ).

Теорема 1. Если  $\bar{\partial}u / \bar{\partial}\bar{z} = 0$  ( $\partial u / \partial z = 0$ ), то  $u(\bar{u})$ -голоморфная в  $T$  функция.

На основании этой теоремы очевидно, что, если  $u(z)$  есть  $\bar{z}$ -примитивная ( $z$ -примитивная) функции  $\omega(z)$ , то любая другая  $\bar{z}$ -примитивная ( $z$ -примитивная) той же функции имеет вид:  $u + f(z)$  ( $u + \bar{f}(\bar{z})$ ), где  $f(z)$  — голоморфная и суммируемая в  $T$  функция.

3. Обозначим через  $S_{\bar{z}}(T)$  и  $S_z(T)$  множества суммируемых в  $T$  функций, имеющих в  $T$  производные в смысле С. Л. Соболева относительно  $\bar{z}$  и  $z$ , соответственно. Легко видеть, что если  $u \in S_{\bar{z}}(T)$ , то  $\bar{u} \in S_z(T)$ . Поэтому достаточно изучить свойства функций множества  $S_{\bar{z}}$ .

Теорема 2. Если  $u(z) \in S_{\bar{z}}(T)$ , то

$$u(z) = f(z) - \frac{1}{\pi} \iint_T \frac{\omega(t)}{t-z} dT_t, \quad z \in T, \quad (4)$$

где  $f(z)$  и  $\omega(z)$  — суммируемые в  $T$  функции, причем  $f(z)$  голоморфна внутри  $T$ , а  $\omega(z) = \partial u / \partial \bar{z}$ . Обратно, если  $f(z)$  и  $\omega(z)$  — суммируемые в  $T$  функции, причем  $f(z)$  голоморфна в  $T$ , то формула (4) дает функцию множества  $S_{\bar{z}}(T)$ .

Доказательство. Если  $\omega \in L(T)$ , то

$$\iint_T \frac{\omega(t)}{t-z} dT_t = u_1(z) \in L(T), \quad z \in T. \quad (5)$$

Это следует из теоремы Фубини, так как неотрицательная функция  $|\omega(t)| |t-z|^{-1}$  измерима и существует повторный интеграл  $\iint_T |\omega(t)| dT_t \iint_T |t-z|^{-1} dT_z$ . Нетрудно также видеть, что  $u_1(z)$  голоморфна вне  $T^*$  и исчезает на бесконечности\*.

Функции  $v \in C_0^1(T)$  можно представить по формуле (см., например, (2), стр. 225):

$$v(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_T \frac{\partial v}{\partial \bar{t}} \frac{dT_t}{t-z}, \quad z \in T. \quad (6)$$

Если внесем это выражение вместо  $v$  в первый интеграл левой части (3) и затем произведем перестановку порядка интегрирования (что законно согласно теореме Фубини), то получим

$$\iint_T \left[ u(z) + \frac{1}{\pi} \iint_T \frac{\omega(t) dT_t}{t-z} \right] \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} dT_z = 0.$$

Так как это равенство имеет место для любой функции  $v \in C_0^1(T)$ , то, согласно теореме 1, будем иметь, что  $u(z)$  — функция вида (4).

\* Ряд свойств функций вида (5) при  $\omega \in C(T)$  доказан в работе (2). После выхода в свет последней А. И. Маркушевич указал автору, что некоторые из этих свойств (см. (2), § 2, пп. 6 и 7) доказаны иным путем в работе В. С. Федорова (3).

Следовательно, первая часть теоремы доказана. Переходим к доказательству второй части теоремы.

Так как  $\iint_T f(z) \frac{\partial v}{\partial z} dT = 0$ , то, в силу (6), будем иметь

$$\iint_T \left[ f(z) - \frac{1}{\pi} \iint_T \frac{\omega(t)}{t-z} dT_t \right] \frac{\partial v}{\partial z} dT_z + \iint_T \omega v dT_z = 0,$$

где  $v$  — любая функция множества  $C_0^1(T)$ . Это равенство доказывает справедливость второй части теоремы. Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

4. Отметим, что формула (4) дает решение следующей проблемы о примитивных:

Требуется для данной функции  $\omega(z) \in L(T)$  найти такую функцию  $u(z) \in S_z(T)$ , что  $\frac{\partial u}{\partial z} = \omega(z)$  в  $T$ .

Таким образом, оператор комплексного дифференцирования  $du / \partial z$  в смысле С. Л. Соболева всегда имеет обратный, который выражается формулой (4). Этот оператор можно назвать неопределенным интегралом для суммируемых функций двух независимых переменных.

5. Укажем теперь некоторые свойства функций множества  $S_z(T)$ , которые легко получаются с помощью формулы (4).

На основании свойства непрерывности в целом функций в  $L_p(T)$  (см. (1), стр. 16) из (4) легко получается следующая теорема:

**Теорема 3.** Если  $\frac{\partial u}{\partial z} \in L_p(T)$ ,  $p > 2$ , то  $u(z) \in C(T)$ .

Пример  $u = \lg \lg \frac{1}{|z|}$  ( $|z| \leq q < 1$ ) показывает, что теорема перестает быть верной при  $p = 2$  (этот пример указал С. Л. Соболев).

**Теорема 4** (формула Остроградского). Если  $u \in C(T^*)$ ,  $du / \partial z \in L_p(T)$ ,  $p > 1$ , то

$$\frac{1}{2i} \int_L u(t) dt = \iint_T \frac{\partial u}{\partial z} dT. \quad (7)$$

В частности, если  $du / \partial z \in C(T)$ , то из последней формулы вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{L_0 \rightarrow z} \frac{1}{2i |T_0|} \int_{L_0} u(t) dt, \quad (8)$$

где  $|T_0|$  обозначает площадь области  $T_0$  ( $T_0 \subset T$ ), ограниченной простой спрямляемой кривой Жордана  $L_0$ , а запись  $L_0 \rightarrow z$  — тот факт, что  $L_0$ , уменьшаясь по длине, произвольным образом стягивается в точку  $z \in T$ .

Этот результат показывает, что производная в смысле Д. Помпею<sup>(3,4)</sup> совпадает с производной в смысле С. Л. Соболева, если последняя непрерывна.

Поступило  
16 II 1953

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950. <sup>2</sup> И. Н. Векуа, Матем. сборн., 31 (73): 2 (1952). <sup>3</sup> В. С. Федоров, Изв. Иваново-Вознесенск. политехн. ин-та, № 6 (1922). <sup>4</sup> D. P o m p e i u, Rendiconti di Palermo, 33 (1912).