Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 4

*ФИЗИКА*

А. А. СОКОЛОВ, Н. П. КЛЕПИКОВ и И. М. ТЕРНОВ

# К ВОПРОСУ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 16 II 1953)*

Развивая работы ([1-4]) по квантовой теории светящегося электрона, нам удалось вычислить квантовые поправки для полной интенсивности излучения. Ограничиваясь исследованием полной интенсивности излучения и не затрагивая вопросов, связанных с траекторией движения, мы можем решать нашу задачу в декартовых координатах, когда в случае постоянного магнитного поля $\mathbf{H}$ можно представить вектор-потенциал в виде: $A_y = Hx$, $A_x = A_z = 0$. Тогда решение уравнения Дирака

$$(E - c(\vec{\alpha}\mathbf{P}) - \rho_3 mc^2)\psi = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{P} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ будет определяться матрицей

$$\psi = \frac{1}{L} e^{-icKt+ik_2y+ik_3z} f(x),$$

$$f(x) = e^{-\xi^2/2} \sqrt[4]{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^{l-1}\,(l-1)!\,2K}} \begin{cases} \sqrt{K+k_0}\,AH_{l-1}(\xi), \\ i\sqrt{\frac{K+k_0}{2l}}\,BH_l(\xi), \\ \frac{1}{\sqrt{K+k_0}}(\sqrt{2\gamma l}B + k_3A)\,H_{l-1}(\xi), \\ \frac{i}{\sqrt{2l(K+k_0)}}(\sqrt{2\gamma l}A - k_3B)\,H_l(\xi). \end{cases} \tag{2}$$

Здесь $m = \hbar k_0/c$ — масса электрона; $\hbar k_2$ и $\hbar k_3$ — составляющие импульса; $E = c\hbar K = c\hbar\sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 2l\gamma}$ — энергия электрона; $H_l$ — полином Чебышева — Эрмита порядка $l$; $l$ — квантовое число; $\gamma = \frac{eH}{c\hbar}$ $\xi = \sqrt{\gamma}(x + k_2/\gamma)$, а амплитуды $A$ и $B$ характеризуют спиновое состояние электрона.

Рассмотрим излучение электрона, происходящее при переходе его из начального состояния ($l$, $K$, $k_2 = k_3 = 0$) в конечное ($l'$, $K'$, $k_2'$, $k_3'$). В этом случае частота $\omega_n$ ($n = l - l'$ — номер гармоники) и интенсивность излучения $W$ будут, соответственно, равны:

$$\omega_n = c\varkappa = c(K - K'), \tag{3}$$

$$W = \frac{e^2\omega_n^2}{c}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, [\,|\overline{\alpha_1}|^2 + \cos^2\theta\,|\overline{\alpha_2}|^2 + \sin^2\theta\,|\overline{\alpha_3}|^2 - \\ - (\overline{\alpha_2^+}\,\overline{\alpha_3} + \overline{\alpha_3^+}\,\overline{\alpha_2})\sin\theta\cos\theta]\,\frac{1}{\frac{\partial(K' + \varkappa)}{\partial\varkappa}}, \tag{4}$$

причем подинтегральное выражение не зависит от азимутального угла $\varphi$ и поэтому, не нарушая окончательных результатов, мы положили $\varphi = \pi/2$, т. е. направили импульс фотона $\hbar\vec{\varkappa}$ перпендикулярно к оси $x$.

Тогда матричный элемент $\bar{\vec{\alpha}}$ будет связан с матрицами Дирака $\vec{\alpha}$ соотношением:

$$\bar{\vec{\alpha}} = \int \psi'^{+} e^{-i\varkappa y \sin\theta - i\varkappa z \cos\theta} \vec{\alpha} \psi \, d^3x. \tag{5}$$

Подставляя сюда значение для волновой функции (2), находим:

$$k_2' = -\varkappa \sin\theta, \quad k_3' = -\varkappa\cos\theta, \quad \bar{\vec{\alpha}} = \int f'^{+} \vec{\alpha} f \, dx,$$
$$\varkappa = \frac{K}{\sin^2\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{n}{l}\beta^2 \sin^2\theta}\right), \quad \beta = \frac{\sqrt{K^2 - k_0^2}}{K}. \tag{6}$$

При вычислении матричных элементов мы должны усреднить их по начальным спиновым состояниям электрона ($|A|^2 = |B|^2 = 1/_2$, $A^{+}B = 0$) и взять сумму по конечным состояниям ($|A'|^2 = |B'|^2 = 1$, $A'^{+}B' = 0$). Тогда, вводя обозначение

$$I_{l,l'} = \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^{l+l'} l!\, l'!}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2 + \xi'^2}{2}} H_{l'}(\xi') H_l(\xi)\, dx \tag{7}$$

и принимая во внимание, что с точностью до членов порядка $n/l$:

$$\frac{KK' - k_0^2}{2KK'} \cong \frac{\gamma\sqrt{ll'}}{KK'} = \frac{1}{2}\beta^2; \quad \frac{\partial K'}{\partial \varkappa} + 1 \cong \frac{K - \varkappa\sin^2\theta}{K - \varkappa} = 1,$$
$$\frac{k_3'}{K} = -\frac{1}{2}\frac{n}{l}\cos\theta, \quad \omega_n \cong n\omega_0\left(1 + \frac{n}{4l}\right), \quad \omega_0 = \frac{ecH}{E}, \tag{8}$$

находим, заменяя сумму по $n$ интегралом, выражение для интенсивности излучения:

$$W = \frac{e^2 n^2 \omega_0^2}{2c}\frac{\beta^2}{2}\int_0^\infty n^2 dn \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \left(1 + \frac{n}{2l}\right)\Big[(I_{l'-1,l} - I_{l',l-1})^2 +$$
$$+ \cos^2\theta\,(I_{l'-1,l} + I_{l',l-1})^2 + \sin^2\theta\,(I_{l,l'} - I_{l-1,l'-1})^2 +$$
$$+ \frac{n\beta}{l}\cos^2\theta\sin\theta\,(I_{l'-1,l-1} I_{l'-1,l} + I_{l,l'} I_{l',l-1})\Big]. \tag{9}$$

Величина $I_{l,l'}$ пропорциональна полиномам Сонина — Лагерра:

$$I_{l,l'} = \frac{1}{\sqrt{l!\,l'!}} x^{\frac{l-l'}{2}} e^{-\frac{x}{2}} Q_{l'}^{(l-l')}(x), \tag{10}$$

где

$$x = \frac{l}{\beta^2 \sin^2\theta}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{n}{l}\beta^2\sin^2\theta}\right)^2, \tag{11}$$

а

$$Q_{l'}^{(l-l')}(x) = (-1)^{l'} \sum_{\nu=0}^{l'} \frac{x^{l'-\nu}\, l!\, l'!\, (-1)^\nu}{\nu!\,(l-\nu)!\,(l'-\nu)!}. \tag{12}$$

Найдем асимптотическое приближение функции $I_{l',l}$ для значений $x$, соответствующих максимуму излучения ($\theta \sim \pi/2$, $x \sim n^2/4l$). С этой целью учтем, что функция $I_{l,l'}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению [5]:

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sqrt{x} I_{l',l}) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{l + l' + 1}{2x} - \frac{(l-l')^2 - 1}{4x^2}\right)\sqrt{x} I_{l',l} = 0, \tag{13}$$

и примем во внимание, что при $x \to 0$ решение становится равным

$$I_{l,l'} = \sqrt{\frac{l!}{l'!}}\, x^{\frac{l-l'}{2}} \frac{1}{(l-l')!}. \tag{14}$$

Согласно [2], асимптотическое решение уравнения (13), одинаково хорошо пригодное как в интересующей нас области $x \to x_0$ ($x < x_0$), так и при $x \to 0$ $(x > 0)$, можно представить в виде

$$I_{l,l'} = A\sqrt{-\frac{z}{z'x}}\,K_{1/3}(z), \tag{15}$$

где

$$z = \int\limits_x^{x_0} \sqrt{\frac{(l-l')^2-1}{4x^2} - \frac{l+l'+1}{2x} + \frac{1}{4}}\,dx, \tag{16}$$

а величина $x_0$ находится из уравнения

$$f(x_0) = \frac{1}{4} - \frac{l+l'+1}{2x_0} + \frac{(l-l')^2-1}{4x_0^2} = 0,$$

т. е.

$$x_0 \cong \frac{(l-l')^2}{2(l+l'+1)}\left(1 + \frac{1}{4}\,\frac{(l-l')^2}{(l+l'+1)^2}\right). \tag{17}$$

Отсюда при $x \to x_0$ имеем

$$z = \frac{2}{3}\,x_0^{3/2}\sqrt{-f'(x_0)}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{3/2} \cong \frac{l-l'}{3}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{3/2}. \tag{18}$$

Для того чтобы определить значение постоянной $A$, мы должны найти выражение для $I_{l,l'}$ в другом крайнем случае $x \to 0$. Раскроем интеграл (16) при $x \to 0$

$$z \cong \frac{1}{2}\left[-(l-l') + (l-l')\ln\frac{(l-l')^2}{x} + \left(l'+\frac{1}{2}\right)\ln\left(l'+\frac{1}{2}\right) - \left(l+\frac{1}{2}\right)\ln\left(l+\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$z' = -\frac{l-l'}{2x}. \tag{19}$$

Учитывая далее формулу Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{20}$$

а также соотношение

$$K_{1/3}(z) \underset{z\to\infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,e^{-z}, \tag{21}$$

находим

$$I_{l,l'} \cong A\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{l!}{l'!}\,\frac{1}{(l-l')!}}\,x^{\frac{l-l'}{2}}. \tag{22}$$

Сопоставляя между собой равенства (15) и (22), получаем, что $A = 1/\pi\sqrt{2}$, и поэтому в интересующей нас области $(x \to x_0)$ асимптотическое значение искомой функции будет равно

$$I_{l,l'} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)}\,K_{1/3}\left(\frac{l-l'}{3}\left(1 - \frac{x}{x_0}\right)^{3/2}\right). \tag{23}$$

При помощи известных рекуррентных соотношений между полиномами Сонина — Лагерра легко показать, что

$$I_{l-1,l'} - I_{l,l'-1} \cong \frac{2\varepsilon}{\pi\sqrt{3}}\,K_{2/3}\left(\frac{n}{3}\,\varepsilon^{3/2}\right), \quad I_{l-1,l'} + I_{l,l'-1} \cong \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\pi\sqrt{3}}\,K_{1/3}\left(\frac{n}{3}\,\varepsilon^{3/2}\right),$$

$$I_{l'-1,l-1}\,I_{l'-1,l} + I_{l',l}\,I_{l',l-1} = \frac{1}{2}\left(I_{l-1,l'} + I_{l'-1,l}\right)^2, \tag{24}$$

$$I_{l,l'} - I_{l-1,l'-1} = \frac{\sqrt{xl}\,n}{n\,l}\left(I_{l',l-1} - I_{l,l'-1}\right) \sim \frac{n}{l},$$

причем, пренебрегая величинами порядка $n^2/l^2$, мы имеем

$$\varepsilon = 1 - \frac{x}{x_0} = (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)\left(1 + \frac{n}{2l}\right)^*. \tag{25}$$

Принимая во внимание, что почти все излучение происходит в области $x \to x_0$, мы будем иметь, вводя новую переменную $y = \frac{n}{3} \varepsilon^{3/2}$,

$$W = \frac{9e^2 \omega_0^2 \beta^2}{c\pi^2} \int\limits_0^\pi \frac{\sin \theta \, d\theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{5/2}} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty y^2 dy \left[1 - \frac{9}{2l} \frac{y}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}\right] \left[K_{2/3}^2 (y) + \frac{\cos^2 \theta}{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} K_{1/3}^2 (y)\right]. \tag{26}$$

Этот способ вычисления полной интенсивности излучения, при котором мы переходим к асимптотическим значениям полиномов Сонина — Лагерра до интегрирования по углу $\theta$ (см. ([3])), позволяет найти квантовые поправки к полной интенсивности излучения в предположении, что $n/l \ll 1$. Используя далее равенства:

$$\int\limits_0^\infty K_\nu^2 (x) \, x^{\mu - 1} dx = \frac{2^{\mu - 3}}{\Gamma(\mu)} \Gamma^2 \left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \nu\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \nu\right)^{**},$$

$$\frac{1}{2} \beta \int\limits_0^\pi \frac{\sin \theta \, d\theta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{n/2}} \cong \int\limits_0^\infty \frac{\beta dx}{(1 - \beta^2 + \beta^2 x^2)^{n/2}} = \frac{\Gamma^2 \left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{n-3}}{\Gamma(n-1)(1 - \beta^2)^{\frac{n-1}{2}}}, \tag{27}$$

окончательно находим:

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{c} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \left\{1 - \frac{55\sqrt{3}}{16} \left(\frac{\hbar}{mcR}\right) \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 + \ldots\right\}, \tag{28}$$

где $R$ — радиус орбиты.

Полагая $\hbar \to 0$, мы получаем известную классическую формулу для излучения релятивистских электронов ($\beta \sim 1$) в магнитном поле. Квантовые поправки к полной интенсивности излучения, так же как и к частоте излучения, становятся заметными лишь в области энергий ([2]):

$$E \sim mc^2 \left(\frac{mcR}{\hbar}\right)^{1/3}, \tag{29}$$

несмотря на то, что, как отмечалось в ([2]), переходы электрона с круговых орбит на некруговые (переходы, которые нельзя объяснить классическим путем) становятся возможными при более низких энергиях:

$$E \sim mc^2 \left(\frac{mcR}{\hbar}\right)^{1/5}. \tag{30}$$

Научно-исследовательский институт физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 XI 1952

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Соколов, ДАН, **67**, 1013 (1949). [2] Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов, Классическая теория поля, 1951. [3] Н. П. Клепиков, Диссертация, НИИ физики МГУ, 1952. [4] А. А. Соколов, Н. П. Клепиков, И. М. Тернов, ЖЭТФ, **23**, 632 (1952). [5] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, **3**, 1949, стр. 422.

* Из (25) видно, что основной член разложения ($n/l = 0$) является сравнительно малой величиной, имеющей при $\theta = \pi/2$ порядок $(1 - \beta^2 \sin^2 \theta) = \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$. Однако следующий член разложения ($\sim n/l$), а также, как легко показать, и более высокие члены разложения ($\sim n^2/l^2$ и т. д.) будут также содержать этот же множитель, и поэтому в первом приближении ($n/l \ll 1$) мы можем ограничиться лишь членами порядка $n/l$.

** См. ([3]).