

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. П. ФИЛИН

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИШНИХ НЕИЗВЕСТНЫХ
В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ, СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 3 II 1953)

1. Расчет статически неопределимых стержневых систем, изготовленных из железобетона, бетона, камня, как правило, выполняется на основании классической теории, что не всегда обеспечивает нужную точность, так как у этих материалов зависимость $\sigma = \sigma(\epsilon)$ нелинейная, в бетоне наблюдаются ползучесть и трещинообразование. В настоящей работе учитывается влияние первого фактора на величину лишних неизвестных в статически неопределимых балочных и арочных системах. Нагружение предполагается простым, деформация — активной. Сохранена гипотеза плоских сечений.

Зависимость между напряжениями и деформациями принята степенная

$$\sigma_i = A\epsilon^x, \quad \tau = B\gamma^x, \quad (1)$$

в форме, хорошо известной из литературы о бетоне и камне (1), а также из ряда монографий, посвященных теории пластичности (2-4). Эти зависимости дают большие погрешности по сравнению с натуральными кривыми $\sigma = \sigma(\epsilon)$ в области малых напряжений; если же рассматривать всю область напряжений в пределах эксплуатационных их значений, то зависимости (1) хорошо изображают натурные кривые.

Лишние неизвестные в статически неопределимых системах определяются из уравнений:

$$\frac{\partial R}{\partial X_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2)$$

где R — дополнительная работа всей системы; n — степень статической неопределимости, X_i — i -я лишняя неизвестная.

2. Энергетические зависимости. Дополнительная работа, обусловленная различными силовыми факторами, выражается формулами:

$$R_M = \sum_{i=1}^m \frac{x}{x+1} \int_0^{l_i} \frac{|M|^{\frac{1}{x}+1} dx}{D_n}; \quad R_N = \sum_{i=1}^m \frac{x}{x+1} \int_0^{l_i} \frac{|N|^{\frac{1}{x}+1} dx}{D_o}; \quad (3)$$

$$R_Q = \sum_{i=1}^m \frac{x}{x+1} \int_0^{l_i} \frac{|Q|^{\frac{1}{x}+1} dx}{D_c}; \quad \mu = \frac{F^{\frac{1}{x}}}{\left(\int_F^{\infty} |y|^{\frac{1}{x}+1} dF\right)^{\frac{1}{x}+1}} \int_F^{\infty} \frac{\left(\int_{F_1}^{\infty} |y|^{\frac{1}{x}+1} dF\right)^{\frac{1}{x}+1}}{b_y^{\frac{1}{x}+1}} dF;$$

m — число стержней в системе; l_i — длина i -го стержня системы; M, N, Q — изгибающий момент, нормальная сила и перерезывающая сила в данном сечении; F — площадь поперечного сечения; b_y — ширина бруса, переменная, вообще говоря, по его высоте; y — расстояние от нейтрального слоя до точки поперечного сечения; F_1 — часть площади поперечного сечения, расположенная по одну сторону от прямой, параллельной нейтральной оси и проходящей через точку сечения; D_n, D_o, D_c — жесткости при изгибе, осевом действии сил и сдвиге:

$$D_n = \sqrt[x]{A \int_F |y|^{x+1} dF}; \quad D_o = \sqrt[x]{AF}; \quad D_c = \sqrt[x]{BF}. \quad (4)$$

Выражение для R_m получено Л. М. Качановым (3).

Так как x , определенная из натуральных данных для материала, оказывается величиной дробной, составление уравнений (2) затрудняется.

Для преодоления этого затруднения расчет задается при 2—3 значениях x , при которых интегралы в (3) могут быть раскрыты в замкнутом виде ($x = p^{-1}$; $p = 1, 2, \dots$). Решение для иных x находится интерполяцией.

3. Балки. Неразрезные балки рассчитываются при помощи системы нелинейных уравнений трех моментов, физический смысл которых остается таким же, как и в классической теории. Это уравнение для n -й опоры имеет вид полного алгебраического уравнения степени p относительно M_n . Коэффициент при M_n^r имеет вид ($r \leq p$):

$$\begin{aligned} & C_p^r \left[\frac{1}{(p-r+1) C_{p+2}^{p-r+1}} \left(\frac{M_{n-1}^{p-r} l_n}{D_{nn}} + \frac{M_{n+1}^{p-r} l_{n+1}}{D_{n,n+1}} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{D_{nn}} \sum_{k=1}^{p-r} M_{n-1}^{p-r-k} C_{p-r}^k \sum_{l=0}^{p-r-k} \frac{A_{k,r+1+l}^{(n)}}{l^{r+1+l}} (-1)^l C_{p-r-k}^l + \\ & \left. + \frac{1}{D_{n,n+1}} \sum_{k=1}^{p-r} M_{n+1}^{p-r-k} C_{p-r}^k \sum_{l=0}^{p-r-k} \frac{B_{k,r+1+l}^{(n+1)}}{l^{r+1+l}} (-1)^l C_{p-r-k}^l \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Здесь

$$A_{ij}^{(n)} = \int_1^{l_n} M_{n0}^i x^j dx; \quad B_{ij}^{(n+1)} = \int_0^{l_{n+1}} M_{n+1,0}^i x^j dx. \quad (6)$$

В первом интеграле x отсчитывается от левой опоры ($n-1$), а во втором интеграле — от правой опоры ($n+1$).

Система нелинейных уравнений трех моментов решается методом последовательных приближений.

В балочных системах учет нелинейности $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ в большинстве случаев не сильно влияет на характер распределения изгибающих моментов (см. рис. 1). Отметим, что при p четных под интегралами в (3) получается нечетная степень. Интеграл приходится разбивать на сумму интегралов, соответствующих участкам эпюры моментов одного знака, пределы интегрирования содержат лишнюю неизвестную, что существенно усложняет уравнение (рис. 1). Выгоднее применять p нечетные. На рис. 1 показан результат расчета статически неопределимой балки.

4. Бесшарнирная арка. Ось арки — коробовая кривая. Законы для F и I_n

$$F = \frac{F_3^3}{\cos^3 \varphi \sum_{j=0}^s B_j \zeta^j} = \frac{F_3^3}{\cos^3 \varphi \sum_{t=0}^s D_t^{(i)} \sin^t \varphi};$$

$$I_n^3 = \frac{I_{нз}^3}{\cos^k \varphi \sum_{j=0}^r A_j \zeta^j} = \frac{I_{нз}^3}{\cos^k \varphi \sum_{t=0}^r E_t^{(i)} \sin^t \varphi}. \quad (7)$$

Индекс z относится к замковому сечению; k принимается в зависимости от характера изменения I_n вдоль оси; A_j и B_j определяются как коэффициенты интерполирующего полинома;

$$D_t^{(i)} = \sum_{j=t}^s C_j^t B_j m_i^j n_i^t; \quad E_t^{(i)} = \sum_{j=t}^r C_j^t A_j m_i^j n_i^t; \quad (8)$$

$m_i = a_i / l$; $n_i = R_i / a_i$; i — номер участка коробовой кривой; a_i , b_i — координаты центра кривизны i -го участка; R_i — его радиус кривизны; l — полупролет.

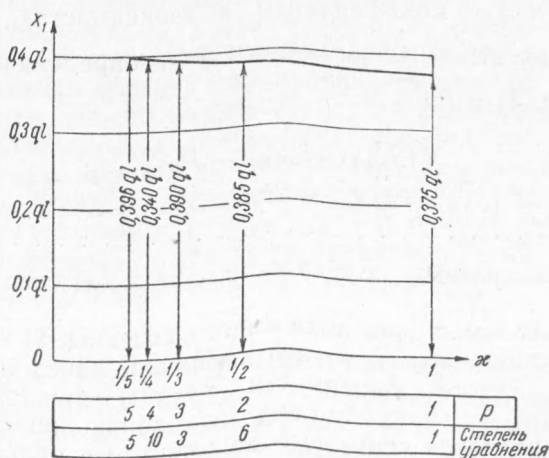
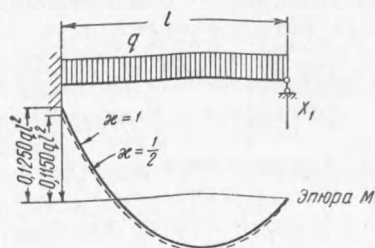


Рис. 1

Уравнения для определения Z и H (изгибающий момент в замке и распор) имеют вид:

$$\alpha_1^{(j)} Z^3 + \alpha_2^{(j)} Z^2 + \alpha_3^{(j)} Z + \alpha_4^{(j)} Z^2 H + \alpha_5^{(j)} Z H + \alpha_6^{(j)} Z H^2 + \alpha_7^{(j)} H + \alpha_8^{(j)} H^2 + \alpha_9^{(j)} H^3 + \alpha_{10}^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2); \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A}_1^{(1)} &= \Sigma R_i K_{0k}^{(i)}; & \mathfrak{A}_2^{(1)} &= -3 \Sigma R_i \Lambda (K_{0k}^{(i)}); & \mathfrak{A}_3^{(1)} &= 3\mathfrak{A}_1^{(2)} = 3 \Sigma R_i \Lambda^2 (K_{0k}^{(i)}); \\
 \mathfrak{A}_4^{(1)} &= 3 \Sigma R_i N (K_{0k}^{(i)}); & \mathfrak{A}_5^{(1)} &= 2\mathfrak{A}_2^{(2)} = -6 \Sigma R_i N [\Lambda (K_{0k}^{(i)})]; \\
 \mathfrak{A}_6^{(1)} &= \mathfrak{A}_4^{(2)} = 3 \Sigma R_i N^2 (K_{0k}^{(i)}); & \mathfrak{A}_7^{(1)} &= \mathfrak{A}_3^{(2)} = 3 \Sigma R_i N [\Lambda^2 (K_{0k}^{(i)})]; \\
 \mathfrak{A}_8^{(1)} &= \frac{1}{2} \mathfrak{A}_5^{(2)} = -3 \Sigma R_i N^2 [\Lambda (K_{0k}^{(i)})]; & \mathfrak{A}_9^{(1)} &= \frac{1}{3} \mathfrak{A}_6^{(2)} = \Sigma R_i N^3 (K_{0k}^{(i)}); \\
 \mathfrak{A}_{10}^{(1)} &= -\Sigma R_i \Lambda^3 (K_{0k}^{(i)}); & \mathfrak{A}_7^{(2)} &= 3 \Sigma R_i \{N^2 [\Lambda^2 (K_{0k}^{(i)})] + (I_{из} : F_3)^3 M^2 (L_{2,5}^{(i)})\}; \\
 \mathfrak{A}_8^{(2)} &= -3 \Sigma R_i \{N^2 [\Lambda (K_{0k}^{(i)})] - (I_{из} : F_3)^3 M (L_{1,6}^{(i)})\}; \\
 \mathfrak{A}_9^{(2)} &= \Sigma R_i \{N^4 (K_{0k}^{(i)}) + (I_{из} : F_3)^3 L_{0,7}^{(i)}\}; \\
 \mathfrak{A}_{10}^{(2)} &= -\Sigma R_i \{N [\Lambda^3 (K_{0k}^{(i)})] - (I_{из} : F_3)^3 M^3 (L_{31}^{(i)})\}.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Суммирование производится по всем участкам коробовой кривой.

$$K_{mn}^{(i)} = \sum_{t=0}^r E_t^{(i)} \Delta^{(i)} \Phi_m^{(n)}; \quad L_{mn}^{(i)} = \sum_{t=0}^s D_t^{(i)} \Delta^{(i)} \Phi_m^{(n)}; \tag{11}$$

$$\Phi_m^{(n)} = \int \sin^m \varphi \cos^n \varphi d\varphi; \quad \Delta^{(i)} \Phi_m^{(n)} = \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \sin^m \varphi \cos^n \varphi d\varphi; \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda (K_{mn}^{(i)}) &= \Sigma \lambda_t^{(i)} K_{m+t, n}^{(i)}; & \Lambda^2 (K_{mn}^{(i)}) &= \Sigma \lambda_t^{(i)} \Lambda (K_{m+t, n}^{(i)}); \\
 \Lambda^3 (K_{mn}^{(i)}) &= \Sigma \lambda_t^{(i)} \Lambda^2 (K_{m+t, n}^{(i)}); \\
 M (L_{mn}^{(i)}) &= \Sigma \mu_t^{(i)} L_{m+t, n}^{(i)}; & M^2 (L_{mn}^{(i)}) &= \Sigma \mu_t^{(i)} M (L_{m+t, n}^{(i)}); \\
 M^3 (L_{mn}^{(i)}) &= \Sigma \mu_t^{(i)} M^2 (L_{m+t, n}^{(i)}).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Суммирование в (13) ведется по t от 0 до 4.

$$\lambda_t^{(i)} = \sum_{j=t}^4 C_j^t \alpha_j m_i^t n_i^t; \quad \mu_t^{(i)} = \sum_{j=t}^4 C_j^t \beta_j m_i^t n_i^t;$$

$\alpha_0 = \beta_0 = 0$; α_j и β_j — коэффициенты в зависимостях, изображающих балочные усилия: $M_6 = \sum_{j=1}^4 \alpha_j \zeta_j$; $Q_6 = \sum_{j=1}^4 \beta_j \zeta_j$, определяются аналогично коэффициентам A_j и B_j ;

$$\begin{aligned}
 N (S_{mn}^{(i)}) &= b_i S_{mn}^{(i)} - R_i S_{m, n+1}^{(i)}; \\
 N^2 (S_{mn}^{(i)}) &= b_i^2 S_{mn}^{(i)} - 2b_i R_i S_{m, n+1}^{(i)} + R_i^2 S_{m, n+2}^{(i)}; \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Под $S_{mn}^{(i)}$ в разных случаях подразумеваются $K_{mn}^{(i)}$, $\Lambda^j (K_{mn}^{(i)})$ ($j = 1, 2, 3$).

В случае двухшарнирной арки вместо системы (9) имеем уравнение степени p , коэффициенты которого выражены через (11), (13).

Учет нелинейности зависимости $\sigma = \sigma(\epsilon)$ при расчете арочных систем приводит к значительному изменению эпюры изгибающих моментов, что является серьезным аргументом в пользу учета указанного фактора при проектировании ответственных массивных арочных конструкций, несмотря на значительный объем вычислений, необходимых при этом.

Поступило
27 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. И. Оნიщик, Пластичность и устойчивость каменных конструкций, 1937.
² А. А. Ильюшин, Пластичность, 1948. ³ Л. М. Качанов, Механика пластических сред, 1948. ⁴ В. В. Соколовский, Теория пластичности, 1950.