Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

В. Н. ПИЛАТОВСКИЙ

К ЗАДАЧЕ О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ К КРУГОВОЙ ГАЛЛЕРЕЕ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 2 II 1953)

1. В нашей работе [1] показано, что решение задачи о фильтрации упругой жидкости к круговой галлерее, дренирующей плоский однородный и неограниченный пласт, сводится к исследованию функции давления

$$h(\rho, \tau) = \int_0^\tau \exp\left(-\frac{1+\rho^2}{4\xi}\right) I_0\left(\frac{\rho}{2\xi}\right)\frac{d\xi}{\xi}, \tag{1}$$

где τ и ρ — соответственно, безразмерное время и расстояние от центра галлереи до рассматриваемой точки, причем $\tau = \varkappa^2 t / R^2$ и $\rho = r / R$; $\varkappa^2$ — коэффициент пьезопроводности; t — размерное время; R — радиус галлереи.

Понижение давления в какой-либо точке пласта через (1) выражается

$$\Delta p = Dh(\rho, \tau), \tag{2}$$

где $D = q\mu / 2\pi bk$, причем q — расход жидкости на галлерее; μ — вязкость жидкости; b — мощность пласта; k — проницаемость пласта.

Там же [1] показано, что изображение $H(\rho, s)$ по Карсону [2] оригинала $h(\rho, \tau)$ по переменному τ приводится к выражениям:

$$\begin{aligned} H(\rho, s) &= H_i(\rho, s) = K_0(\sqrt{s})\, I_0(\rho\sqrt{s}) \doteqdot h_i(\rho, \tau) \quad (0 \leqslant \rho \leqslant 1); \\ H(\rho, s) &= H_e(\rho, s) = K_0(\rho\sqrt{s})\, I_0(\sqrt{s}) \doteqdot h_e(\rho, \tau) \quad (1 \leqslant \rho). \end{aligned} \tag{3}$$

Нетрудно показать, что функция $h(\rho, \tau)$ в силу (1) удовлетворяет функциональной зависимости

$$h(\rho, \tau) = h(\rho^{-1}, \rho^{-2}\tau). \tag{4}$$

На основании (4) значения $h(\rho, \tau)$ определяются для $\rho \geqslant 1$, если известны значения $h(\rho, \tau)$ для $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Для значений $\tau > 5$ целесообразно пользоваться приводимыми ниже разложениями $h(\rho, \tau)$.

2. В работе [3] в связи с исследованием фильтрационного потока упругой жидкости к круговой батарее стоков в предельном случае, когда батарея переходит в круговую галлерею, В. Н. Щелкачев предлагает формулу для определения понижения давления

$$\Delta p = \frac{D}{2}\left[\ln\frac{4\tau}{\rho^2} - C + \sum_{\sigma=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\sigma \geqslant 2n} \frac{(-1)^{\sigma-1}(1+\rho^2)^{\sigma-2n}\rho^{2n}}{\sigma(n!)^2(\tau-2n)!(4\tau)^\sigma}\right]. \tag{5}$$

В выражении (5) для точек внутренней области галлереи первый член квадратных скобок необходимо заменить на $\ln 4\tau$ (формула (5) приводится здесь в наших обозначениях). Разложение (5) хорошо сходится для больших τ при фиксированных ρ, для малых τ ряд (5) ввиду медленной сходимости непригоден к вычислению падения Δp.

Понижение давления в какой-либо точке k пласта, вызванное работой отдельной скважины с постоянным расходом, определяется:

$$\Delta p_k = -\frac{D_k}{2}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{\rho_k^2}{4\tau}\right) = \frac{D_k}{2}\int\limits_{\rho_k^2/4\tau}^{\infty}\frac{e^{-\xi}}{\xi}\,d\xi. \tag{6}$$

Если работу галлереи с расходом q представим как работу системы элементарных скважин, расставленных по окружности с радиусом R, причем $D_k = D\,d\theta\,/\,2\pi$, $\rho_k^2 = 1 + \rho^2 - 2\rho\cos\theta$, то получим:

$$\Delta p = \sum_{k=1}^{n}\Delta p_k = -\int\limits_0^{2\pi}\frac{D}{2}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}{4\tau}\right)\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{7}$$

Интегрирование (7) по θ легко приводит к (1) и (2).

Итак, мы доказали, что в области сходимости ряд (5) суммируется и выражается через функцию $h(\rho, \tau)$ в форме (2).

3. Исходя из (1) и (3), найдем функциональные разложения (11), (13), годные для вычисления $h(\rho, \tau)$ в более широкой области значений ρ, τ, нежели область, в которой можно пользоваться разложением (5).

Известное разложение в ряд функции Бесселя $I_0(z)$ [2] дает:

$$I_0(\sqrt{s}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{s}{4}\right)^n. \tag{8}$$

Подставляем (8) в изображение $H_e(\rho, s)$ (3), переходим к оригиналу $h_e(\rho, \tau)$, используя известные соотношения операционного исчисления [2], найдем оригинал $h_e(\rho, \tau)$ для $\rho \geqslant 1$:

$$h_e(\rho, \tau) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ei}\left(-\frac{\rho^2}{4\tau}\right) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!^2 4^{n+1}}\frac{d^n}{d\tau^n}\left[\frac{\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\tau}\right)}{2\tau}\right]. \tag{9}$$

Подстановка

$$\zeta = -\rho^2\,/\,4\tau \tag{10}$$

приводит разложение (9) к форме

$$h_e(\rho, \tau) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ei}(\zeta) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{T_n(\zeta)}{(n+1)!^2\,\rho^{2(n+1)}}, \tag{11}$$

где $T_n(\zeta)$ определяются из рекуррентных соотношений:

$$T_0(\zeta) = \zeta e^{\zeta};\quad T_n(\zeta) = \zeta^2\frac{dT_{n-1}(\zeta)}{d\zeta}\quad (n \geqslant 1). \tag{12}$$

На внутренней области $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, поэтому на основании (4), (10), (11) и (12) получим при $\zeta = -1\,/\,4\tau$

$$h_i(\rho, \tau) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ei}(\zeta) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^{2(n+1)}\,T_n(\zeta)}{(n+1)!^2}. \tag{13}$$

4. Для функции давления $h(\rho, \tau)$, определяемой зависимостью (1), найдем другую форму записи в конечном виде. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости равенства

$$h(\rho, \tau) = h(0, \tau) + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-s\xi}\,\frac{I_0(\xi) - e^{\rho\xi/2}}{\xi}\,d\xi - \frac{1}{2}\int_0^{\rho/2\tau} e^{-s\xi}\,\frac{I_0(\xi) - e^{-\rho\xi/2}}{\xi}\,d\xi, \quad (14)$$

где положено

$$s = {}^1/_2(\rho + \rho^{-1}). \quad (15)$$

Обозначим через $\varphi(\xi)$ функцию

$$\varphi(\xi) = \frac{I_0(\xi) - e^{\rho\xi/2}}{\xi}. \quad (16)$$

Изображение $\Phi(s)$ по Карсону для оригинала $\varphi(\xi)$ дает:

$$\Phi(s) = s\int_0^\infty e^{-s\xi}\varphi(\xi)\,d\xi \div \varphi(\xi). \quad (17)$$

Используя ([2]), имеем:

$$F(s) = \frac{\rho}{\sqrt{s^2-1}} - \frac{2s}{2s-\rho} \div \xi\varphi(\xi) = f(\xi), \quad (18)$$

$$\int_s^\infty \frac{F(s)}{s}\,ds \div \int_0^\xi \frac{f(\xi)}{\xi}\,d\xi = \int_0^\xi \varphi(\xi)\,d\xi. \quad (19)$$

На основании (17), (18) и (19) получим:

$$\frac{\Phi(s)}{s}\int_0^\infty e^{-s\xi}\varphi(\xi)\,d\xi = \int_s^\infty \frac{F(s)}{s}\,ds = \int_s^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{s^2-1}} - \frac{2}{2s-\rho}\right)ds = \ln\frac{2s-\rho}{s+\sqrt{s^2-1}}. \quad (20)$$

Подставляя (15) и (16) в (20), найдем

$$\ln\frac{\rho^2+1-|\rho^2-1|}{2\rho^2} = \int_0^\infty e^{-s\xi}\,\frac{I_0(\xi) - e^{\rho\xi/2}}{\xi}\,d\xi. \quad (21)$$

Равенство (14) на основании (21) приводим к выражениям

$$h_i(\rho, \tau) = h(0, \tau) - \frac{1}{2}\int_0^{\rho/2\tau} e^{-s\xi}\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (22)$$

$$h_e(\rho, \tau) = h(0, \tau) - \ln\rho - \frac{1}{2}\int_0^{\rho/2\tau} e^{-s\xi}\varphi(\xi)\,d\xi. \quad (23)$$

Из (22), (23) следует

$$\lim_{\tau\to\infty}\,[h(1, \tau) - h(0, \tau)] = 0. \quad (24)$$

Предел (24) выражает тот факт, что с течением времени на внутренней области галлереи происходит выравнивание давления, вследствие чего депрессия в центре относительно контура галлереи стремится к нулю.

5. Равенства (22) и (23) позволяют найти раздельно внутренний и внешний притоки жидкости к галлерее. Предварительно получаем из (22) и (23) дифференцированием

$$\frac{\partial h_{i,e}}{\partial \rho} = \pm \frac{1}{2\rho} - \frac{1}{2\rho}\exp\left(-\frac{1+\rho^2}{4\tau}\right) I_0\left(\frac{\rho}{2\tau}\right) + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)\int_0^{\rho/2\tau} e^{-s\xi} I_0(\xi)\, d\xi. \quad (25)$$

Для внутреннего притока из (25) получаем функцию расхода ω_i

$$\omega_i = \frac{q_i}{q} = \frac{\partial h_i}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2\tau}\right) I_0\left(\frac{1}{2\tau}\right). \quad (26)$$

Для внешнего притока из (25) получаем функцию расхода ω_e

$$\omega_e = \frac{q_e}{q} = -\frac{\partial h_e}{\partial \rho}\bigg|_{\rho=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2\tau}\right) I_0\left(\frac{1}{2\tau}\right). \quad (27)$$

В силу (26) и (27) очевидно, что внутренний и внешний притоки жидкости в начальный момент одинаковы; с течением времени внутренний приток стремится к нулю.

Поступило
14 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Пилатовский, Инженерный сборник ОТН АН СССР, 13 (1952). [2] В. А. Диткин, П. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, 1951. [3] В. Н. Щелкачев, ДАН, 69, № 4 (1951).