

Действительный член Болгарской Академии наук И. ЦЕНОВ
ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПАХ
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 12 I 1953)

1. В данной заметке излагается новое доказательство принципа Мопертью — Лагранжа, а также дается обобщение принципа Остроградского — Гамильтона на случай механических систем с линейными неголономными связями.

В одной из предыдущих наших работ ⁽¹⁾ мы показали, что уравнение движения голономной механической системы, геометрическая конфигурация которой определяется обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_s$, совокупность которых мы будем обозначать через $[q^i]$, могут быть написаны в форме

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (1)$$

где

$$K = 1/2 (\dot{T} - 3\dot{T}_0), \quad (2)$$

T есть кинетическая энергия системы, а функция T_0 представляет собой выражение T , в котором переменными следует считать только координаты $[q_i]$, а скорости $[\dot{q}_i]$ фиксированными.

В другой нашей работе ⁽²⁾ мы преобразовали уравнения (1), перейдя от времени t к новой независимой переменной σ при помощи соотношения

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2U + 2h, \quad (3)$$

где U — силовая функция сил системы, а h — константа интеграла живой силы

$$T = U + h. \quad (4)$$

Покажем, что уравнения (1) после преобразования (3) будут выражать тот факт, что в истинном движении системы интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \int_{P_0}^{P_1} \sum m v dM \quad (5)$$

достигает минимума сравнительно со всеми другими движениями, переводящими систему из положения P_0 в положение P_1 и происходящими с одним и тем же значением константы h ; через M обозначены радиусы-векторы точек M системы.

Для доказательства отметим, во-первых, что, имея

$$T = \frac{1}{2} \sum m \dot{M}^2 = \frac{1}{2} \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k = U + h, \quad (6)$$

можно (3) переписать в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{2U + 2h} \sqrt{\sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k}, \quad (7)$$

откуда

$$(2U + 2h) \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k = 1, \quad (8)$$

где штрихи обозначают производные по σ .

На основании (5), (6) и (8) будем иметь:

$$I = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} d\sigma = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} (2U + 2h) \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k d\sigma. \quad (9)$$

Далее составим δI , обозначая $2U + 2h$ через N , а также принимая во внимание перестановочность операций d и δ для q_i в силу голономности системы:

$$\delta I = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left[2N \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} \dot{q}_k \delta q_i' + \right. \\ \left. + \left(2N \sum m \frac{\partial M}{\partial q_k} \frac{\partial^2 M}{\partial q_i \partial q_r} + \frac{\partial N}{\partial q_i} \sum m \frac{\partial M}{\partial q_k} \frac{\partial M}{\partial q_r} \right) \dot{q}_k \dot{q}_r' \delta q_i \right] d\sigma.$$

Принимая во внимание $\delta q_i' d\sigma = d\delta q_i$, будем иметь:

$$\delta I = 2 \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left[N \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \left(N \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial^2 M}{\partial q_k \partial q_r} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial N}{\partial q_r} \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial q_i} \sum \frac{\partial M}{\partial q_k} \frac{\partial M}{\partial q_r} \right) \dot{q}_k \dot{q}_r' \right] \delta q_i d\sigma = 0.$$

В силу произвольности δq_i получаем уравнения:

$$2U + 2h \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \left[(2U + 2h) \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial^2 M}{\partial q_k \partial q_r} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial U}{\partial q_r} \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} - \frac{\partial U}{\partial q_i} \sum m \frac{\partial M}{\partial q_k} \frac{\partial M}{\partial q_r} \right] \dot{q}_k \dot{q}_r = 0. \quad (10)$$

Теперь, если возвратиться к старому переменному t , а затем написать выражение функции K в развернутом виде:

$$K = \frac{1}{2} \sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial M}{\partial q_k} \ddot{q}_k \ddot{q}_i + \left(\sum m \frac{\partial M}{\partial q_i} \frac{\partial^2 M}{\partial q_k \partial q_r} \dot{q}_k \dot{q}_r - \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) \ddot{q}_i +$$

+ члены, не содержащие вторых производных от координат, (11)

легко увидеть, что квадратные скобки в выражении δI представляют собой левые части уравнений движения системы (1) и, следовательно, уравнения (10). Таким образом, принцип наименьшего действия доказан. Очевидно, что и обратно, постулировав $\delta I = 0$ при прежних условиях, мы найдем уравнения (1) движения системы.

2. Перейдем теперь к обобщению принципа Остроградского — Гамильтона на случай неголономных систем с линейными связями. Положим, что между геометрическими координатами системы, общее число которых равно s , существует p дифференциальных соотношений (не интегрируемых), которые можно написать в виде

$$dq_i = a_{i\alpha} dq_\alpha + a_i dt$$

или

$$\dot{q}_i = a_{i\alpha} \dot{q}_\alpha + a_i \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k; i = k + 1, k + 2, \dots, k + p = s), \quad (12)$$

откуда вытекают соотношения и между вариациями координат системы

$$\delta q_i = a_{i\alpha} \delta q_\alpha, \quad (13)$$

показывающие, что система имеет только k степеней свободы. При этом мы вместе с другими авторами (3-6) применим к вариациям независимых координат коммутативность операций дифференцирования по времени и варьирования, т. е. будем пользоваться соотношениями

$$\delta d q_\alpha = d \delta q_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, k). \quad (14)$$

Покажем теперь, что действительное движение данной неголономной механической системы отличается от всех кинематически возможных смежных движений, переводящих данную систему из одной конфигурации ($t = t_0$) в другую ($t = t_1$), тем, что в действительном движении интеграл

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta \bar{T} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} \overline{\delta \dot{q}_i} + P_\alpha \delta q_\alpha \right) dt \quad (15)$$

равен нулю. При этом T есть первоначальная живая сила системы, когда еще не приняты во внимание неголономные связи (12); под \bar{T} подразумевается преобразованная кинетическая энергия системы, получающаяся после замены в T зависимых скоростей через независимые по уравнениям связей; вариации $\delta \dot{q}_i$ вычисляются из уравнений связей; символом $\overline{\delta \dot{q}_i}$ обозначаются вариации от \dot{q}_i как от независимых, т. е. для этих вариаций можем написать на основании (14):

$$\overline{\delta \dot{q}_i} dt = \delta d q_i = a_{i\alpha} \delta q_\alpha; \quad (16)$$

наконец, P_α выражается через обобщенные активные силы посредством соотношений

$$P_\alpha = Q + Q_i a_{i\alpha}. \quad (17)$$

Для доказательства нашего предложения произведем следующие преобразования в подинтегральном выражении в (15):

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \delta \bar{T} &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[- \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial q_\alpha} + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{q}_i} \right) a_{i\alpha} \right] \delta q_\alpha dt. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее:

$$\begin{aligned} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k + a_{i\alpha} \delta q_\alpha \right) dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} a_{k\alpha} \right) \delta q_\alpha dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} a_{i\alpha} \right) \delta q_\alpha dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_k} a_{k\alpha} - \dot{a}_{i\alpha} \right) \delta q_\alpha dt + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \overline{\delta \dot{q}_i} dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\delta q_i = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt. \quad (20)$$

В результате, вследствие (18), (19), (20), выражение δI примет вид:

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \left[- \frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial q_i} a_{i\alpha} - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{i\alpha} \right) + P_\alpha \right] \delta q_\alpha dt. \quad (21)$$

Но в нашей предыдущей работе ⁽²⁾ мы показали, что уравнения действительного движения неголономной системы могут быть написаны в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{i\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} a_{i\alpha} - P_\alpha = 0, \quad (22)$$

откуда и вытекает, что $\delta I = 0$. Очевидно, что можно провести и обратное рассуждение: приняв, что $\delta I = 0$ в действительном движении, получить уравнения действительного движения в форме (22).

Интегралу в правой части (15) можно придать другой вид, если ввести еще следующие функции: обозначим через T_1 функцию T , рассматриваемую как функцию только от скоростей $[q_i]$, и через \overline{T}_1 — результат замены в T_1 скоростей \dot{q}_i через независимые \dot{q}_α по уравнениям связей. Тогда будем иметь:

$$\delta T_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \overline{\delta \dot{q}_i}, \quad \delta \overline{T}_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i. \quad (23)$$

В результате выражение δI в (15) примет вид:

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} [\delta (\overline{T} - \overline{T}_1 + T_1) + P_\alpha \delta q_\alpha] dt. \quad (24)$$

Если, наконец, активные силы имеют силовую функцию U , то

$$\delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial U}{\partial q_i} a_{i\alpha} \right) \delta q_\alpha = P_\alpha \delta q_\alpha; \quad (25)$$

тогда I будет представлять интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (\overline{T} - \overline{T}_1 + T_1 + U) dt, \quad (26)$$

и, следовательно, выполнение условия $\delta I = 0$ в действительном движении системы будет выражать обобщение принципа Остроградского — Гамильтона на неголономные системы. Легко доказать, что в случае интегрируемости уравнений связей (12) мы действительно получим выражение обычного принципа Остроградского — Гамильтона для голономной системы с k степенями свободы и с координатами $[q_\alpha]$.

Поступило
17 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Ценов, ДАН, 89, № 1 (1953). ² И. Ценов, ДАН, 89, № 2 (1953).
³ Г. К. Суслев, Теоретическая механика, изд. 3-е, М., 1946, стр. 597. ⁴ P. Appell, Bull. Soc. Mathem. de France, 21 (1898). ⁵ V. Volterra, Atti del R. Accad. dei Science di Torino, 33, 215 (1897). ⁶ Т. Леви-Чивита, У. Амальди, Курс теоретической механики, 2, ч. 1, русск. пер., 1951, стр. 328.