Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

В. ШЕХТЕР

О СИСТЕМЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 7 II 1953)

В работе рассматривается вопрос разыскания так называемой полной системы положительных интегралов уравнений Максвелла в ограниченной области с идеально проводящей границей. Этой задачей занимался Д. М. Волков [1, 2], который получил интеграл первого порядка. В нашей работе используется метод построения интегралов высших порядков из интегралов известного вида, данный О. А. Ладыженской [3]. Показывается, в частности, что интеграл Д. М. Волкова также преобразуется в интеграл известного вида.

Рассматривается множество решений однородных уравнений Максвелла (заряды и токи отсутствуют), имеющих непрерывные производные по x_i $(i=1, 2, 3)$ и t до k-го порядка $(k \geqslant 2)$ в ограниченной области Ω с идеально проводящей границей S.

В каждой точке M поверхности S вводится местная система координат y_1, y_2, y_3. При этом поверхностную функцию $y_3 = \omega(y_1, y_2)$, дающую уравнение участка поверхности S в некоторой окрестности точки M в местной системе координат, считаем $k+1$ раз непрерывно дифференцируемой функцией.

В окрестности точки M возьмем какую-нибудь ортогональную координатную сетку на поверхности, причем будем считать, что оси y_1 и y_2 касаются координатных линий этой сетки в точке M, а y_3 направлена по нормали. Кроме того, будем считать, что координатные линии определяются $k+1$ раз непрерывно дифференцируемыми функциями. В каждой точке поверхности, принадлежащей рассматриваемой окрестности точки M, введем три орта $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, направленные соответственно по координатным линиям и нормали к поверхности. Вследствие предположенной гладкости поверхности и выбранных координатных линий орты $\mathbf{e}_i$ можно продолжить с куска поверхности, принадлежащего указанной окрестности точки M, в некоторую трехмерную окрестность этого куска S так, чтобы сохранилась их ортонормальность и чтобы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ были бы k раз непрерывно дифференцируемыми функциями y_1, y_2, y_3. Такое продолжение можно осуществить, например, параллельным переносом ортов вдоль нормали к S.

Скалярные произведения ортов и векторов электрической и магнитной напряженностей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ обозначим $E^i \equiv (\mathbf{E}, \mathbf{e}_i)$; $H^i \equiv (\mathbf{H}, \mathbf{e}_i)$ $(i=1, 2, 3)$.

Уравнения Максвелла запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \qquad (1)$$

Граничные условия в случае идеально проводящей границы суть ([1]):

$$E^1|_S = E^2|_S = H^3|_S = 0, \quad \left(\frac{\partial E^3}{\partial n} + \rho E^3\right)_S = 0,$$
$$\left(\frac{\partial H^1}{\partial n} + R_{11}H^1 + R_{12}H^2\right)_S = 0, \quad \left(\frac{\partial H^2}{\partial n} + R_{21}H^1 + R_{22}H^2\right)_S = 0, \tag{2}$$

где $R_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \omega}{\partial y_i\, \partial y_j}$ $(i,\ j = 1,\ 2)$; $\rho \equiv R_{11} + R_{22}$; $\frac{\partial}{\partial n} \equiv \sum_{i=1}^{3} \cos(x_i,\ \mathbf{e}_3) \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Уравнения (1) легко привести к более удобному виду:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{E}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{H}. \tag{3}$$

Мы ставим перед собой задачу определить совокупность положительных интегралов уравнений Максвелла (1) + (2) или (3) + (2), т. е. квадратичных функционалов, которые на множестве решений этих уравнений сохраняют постоянное во времени значение, полную в том смысле, что из ограниченности интегралов этой совокупности следовала бы ограниченность выражения

$$\mathscr{H}_k(\mathbf{E},\ \mathbf{H}) \equiv \int_\Omega \sum_{m=0}^{k} \sum_{i_1 \ldots i_m = 0}^{3} \left[\left(\frac{\partial^m \mathbf{E}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}\right)^2 + \left(\frac{\partial^m \mathbf{H}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}\right)^2\right] d\Omega \tag{4}$$

для всех $t = x_0$ из промежутка $(-\infty,\ \infty)$.

Для задачи (1) + (2) известен интеграл нулевого порядка, пропорциональный энергии электромагнитного поля,

$$\mathscr{E}_0(\mathbf{E},\ \mathbf{H}) = \int_\Omega [(\mathbf{E})^2 + (\mathbf{H})^2]\, d\Omega. \tag{5}$$

Ясно, что $\mathbf{E}_{(m)} \equiv \partial^m \mathbf{E} / \partial t^m$ и $\mathbf{H}_{(m)} \equiv \partial^m \mathbf{H} / \partial t^m$ также удовлетворяют задаче (1) + (2), а потому из (5) следует существование положительных интегралов

$$\mathscr{E}_0(\mathbf{E}_{(m)},\ \mathbf{H}_{(m)}) = \int_\Omega [(\mathbf{E}_{(m)})^2 + (\mathbf{H}_{(m)})^2]\, d\Omega. \tag{6}$$

$\mathscr{E}_0(\mathbf{E}_{(m)},\ \mathbf{H}_{(m)})$ будем называть интегралом m-го порядка.

В работе показывается, что система интегралов (6) при $m = 0, 1, \ldots, k$ является полной в указанном выше смысле. Для доказательства сперва преобразуется к более удобному виду интеграл первого порядка

$$\mathscr{E}_0(\mathbf{E}_{(1)},\ \mathbf{H}_{(1)}) = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)^2\right] d\Omega =$$
$$= \int_\Omega [(\operatorname{rot} \mathbf{H})^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{E})^2 + (\operatorname{div} \mathbf{H})^2 + (\operatorname{div} \mathbf{E})^2]\, d\Omega. \tag{7}$$

Преобразование правой части (7) с использованием (1), (2) и интегрирования по частям приводит к результату, что $\mathscr{E}_0(\mathbf{E}_{(1)},\ \mathbf{H}_{(1)})$ совпадает с интегралом $\mathscr{E}_1(\mathbf{E},\ \mathbf{H})$, приведенным Д. М. Волковым в работах ([1, 2]):

$$\mathscr{E}_0(\mathbf{E}_{(1)},\ \mathbf{H}_{(1)}) = \mathscr{E}_1(\mathbf{E},\ \mathbf{H}) \equiv$$
$$\equiv \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_i}\right)^2\right] d\Omega + \int_S \left[\rho(\mathbf{E})^2 + \sum_{i,\ j=1}^{2} R_{ij} H^i H^j\right] dS. \tag{8}$$

Далее доказывается утверждение о полноте системы интегралов (6) в общем виде. При этом мы следуем методу, данному О. А. Ладыженской [3] для решения аналогичного вопроса в случае одного гиперболического уравнения. Отличие нашей задачи от задачи, разобранной О. А. Ладыженской, заключается в том, что мы рассматриваем, во-первых, векторное волновое уравнение, а во-вторых, граничные условия связывают между собою различные компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ (в фиксированной системе координат x_1, x_2, x_3). Однако первое различие несущественно. Именно, мы можем получить векторные аналоги тех тождеств работы [3], которые доказаны без учета каких-либо граничных условий на функции. Для этого достаточно выписать их для каждой компоненты (по фиксированным координатам) отдельно и затем сложить, получая скалярное произведение векторов. На эти тождества мы будем ссылаться без доказательств.

Введем вспомогательные обозначения:

$$
\begin{gathered}
I_m(\mathbf{u}) \equiv \int_\Omega \sum_{i_1 \ldots i_m = 1}^{3} \left(\frac{\partial^m \mathbf{u}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \right)^2 d\Omega, \\
T_k(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \equiv \sum_{m=0}^{k} [I_m(\mathbf{E}) + I_m(\mathbf{H})].
\end{gathered} \tag{9}
$$

Чтобы показать ограниченность $\mathscr{H}_k(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, достаточно доказать ограниченность выражения $T_k(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, получающегося при отсутствии в (4) дифференцирования по времени. В самом деле, в силу того, что уравнение (1) и условия (2) справедливы также и для $\mathbf{E}_{(l)}$ и $\mathbf{H}_{(l)}$, из ограниченности $T_k(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, доказанной при использовании только (1) и (2), следует ограниченность членов вида $T_{k-l}(\mathbf{E}_{(l)}, \mathbf{H}_{(l)})$ $(l \leqslant k)$, из конечного числа которых и состоит $\mathscr{H}_k(\mathbf{E}, \mathbf{H})$.

Основная часть работы состоит в доказательстве равенства

$$
\mathscr{E}_0(\mathbf{E}_{(m)}, \mathbf{H}_{(m)}) = I_m(\mathbf{E}) + I_m(\mathbf{H}) + R_m(\mathbf{E}) + R_m(\mathbf{H}) \quad (m = 0, 1, \ldots, k), \tag{10}
$$

где $R_m(\mathbf{u})$ является интегралом по S от конечной суммы произведений производной u_i не выше $(m-1)$-го порядка на производную u_j также не выше $(m-1)$-го порядка с некоторыми коэффициентами, не зависящими от $\mathbf{u}$, где u_i и u_j — компоненты $\mathbf{u}$ в фиксированной системе координат.

Из соотношения (10) уже легко вывести неравенство $T_k(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \leqslant$ $\leqslant c_k \sum_{m=0}^{k} \mathscr{E}_0(\mathbf{E}_{(m)}, \mathbf{H}_{(m)})$, из которого и следует полнота системы интегралов (6).

Используя (3) и (8), можно показать, что для доказательства (10), в свою очередь, достаточно установить, что при $\mathbf{u} = \mathbf{E}$ и при $\mathbf{u} = \mathbf{H}$

$$
\Psi_m(\mathbf{u}) \equiv I_m(\mathbf{u}) - I_{m-2\left[\frac{m}{2}\right]}\left(\Delta^{\left[\frac{m}{2}\right]} \mathbf{u}\right) = R_m(\mathbf{u}), \tag{11}
$$

где $R_m(\mathbf{u})$ — выражение указанного выше вида.

Интегрированием по частям $\Psi_m(\mathbf{u})$ может быть преобразовано к интегралу по S. Выражение, стоящее под знаком этого интеграла, в каждой точке поверхности инвариантно относительно выбора декартовой системы координат. Поэтому все дальнейшие преобразования можно проводить в местной системе координат y_1, y_2, y_3. Используя тождество $\frac{\partial^2}{\partial y_3^2} \equiv \Delta - \Delta_1$, где $\Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}$, можно убедиться, что $\Psi_m(\mathbf{u})$ только на выражение типа $R_m(\mathbf{u})$ отлично от конечной суммы интегралов

$$
\int_S \sum_{i_1 \ldots i_r = 1}^{2} \left(\frac{\partial^{r+1} \Delta_1^{p_1} \Delta^{q_1} \mathbf{u}}{\partial y_3 \, \partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_r}}, \; \frac{\partial^r \Delta_1^{p_2} \Delta^{q_2} \mathbf{u}}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_r}} \right) dS \tag{12}
$$

при $r \geqslant 1$ и

$$2p_1 + 2q_1 + r = 2p_2 + 2q_2 + r = m - 1 \tag{а}$$

или

$$2p_1 + 2q_1 + r + 1 = 2p_2 + 2q_2 + r - 1 = m - 1. \tag{б}$$

Остается показать, что интегралы (12) фактически не содержат производных от $\mathbf{u}$ m-го порядка и, следовательно, являются выражениями типа $R_m(\mathbf{u})$. Рассмотрим в качестве примера выражение (12) в случае (а) и при $\mathbf{u} = \mathbf{H} = H^1\mathbf{e}_1 + H^2\mathbf{e}_2 + H^3\mathbf{e}_3$. Легко видеть, что члены, получающиеся при дифференцировании ортов, имеют вид $R_m(\mathbf{H})$. Тогда

$$\int_S \sum_{i_1 \ldots i_r = 1}^{2} \left(\frac{\partial^{r+1}\Delta_1^{p_1}\Delta^{q_1}\mathbf{H}}{\partial y_3\, \partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_2}}, \frac{\partial^r \Delta_1^{p_2}\Delta^{q_2}\mathbf{H}}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_r}} \right) dS =$$

$$= R_m'(\mathbf{H}) + \int_S \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{i_1 \ldots i_r = 1}^{2} \left(\frac{\partial^r \Delta_1^{p_2}\Delta^{q_2}\mathbf{H}}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_r}}, \mathbf{e}_\beta \right) \frac{\partial^{r+1}\Delta_1^{p_1}\Delta^{q_1}H^\beta}{\partial y_3\, \partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_r}}\, dS \tag{13}$$

$$(2p_1 + 2q_1 + r = 2p_2 + 2q_2 + r = m - 1).$$

Используя условия (2), которые справедливы не только для H^β, но и для $\Delta^{q_1} H^\beta = \frac{\partial^{2q_1} H^\beta}{\partial t^{2q_1}}$, а также то обстоятельство, что оператор Δ_1 содержит дифференцирование только по касательным координатам, нетрудно показать, что в (13) члены с $\beta = 1, 2$ допускают понижение порядка старшей производной, т. е. являются выражениями типа $R_m(\mathbf{H})$. Чтобы доказать аналогичное утверждение и для членов с $\beta = 3$, воспользуемся тем, что в (12) $r \geqslant 1$, т. е. старшая производная в (13) содержит хотя бы одно дифференцирование по касательным координатам:

$$\int_S \sum_{i_1 \ldots i_r = 1}^{2} \frac{\partial^{r+1}\Delta_1^{p_1}\Delta^{q_1}H^3}{\partial y_3\, \partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_r}} \left(\frac{\partial^r \Delta_1^{p_2}\Delta^{q_2}\mathbf{H}}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_r}}, \mathbf{e}_3 \right) dS =$$

$$= \int_S \sum_{i_r=1}^{2} \frac{\partial}{\partial y_{i_r}} \left[\sum_{i_1 \ldots i_{r-1}=1}^{2} \frac{\partial^r \Delta_1^{p_1}\Delta^{q_1}H^3}{\partial y_3\, \partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_{r-1}}} \left(\frac{\partial^r \Delta_1^{p_2}\Delta^{q_2}\mathbf{H}}{\partial y_{i_r}\, \partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_{r-1}}}, \mathbf{e}_3 \right) \right] dS -$$

$$- \int_S \sum_{i_1 \ldots i_{r-1}=1}^{2} \frac{\partial^r \Delta_1^{p_1}\Delta^{q_1}H^3}{\partial y_3\, \partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_{r-1}}} \frac{\partial^{r-1}\Delta_1^{p_2+1}\Delta^{q_2}H^3}{\partial y_{i_1} \ldots \partial y_{i_{r-1}}}\, dS + R_m''(\mathbf{H}) \tag{14}$$

$$(2p_1 + 2q_1 + r = 2p_2 + 2q_2 + r = m - 1).$$

В формуле (14) во втором члене имеется дифференцирование только по касательным координатам, а потому, используя (2) и (3), убеждаемся, что этот член имеет вид $R_m(\mathbf{H})$. Возможность же понижения порядка дифференцирования в первом члене правой части (14) следует из геометрической леммы Х. Л. Смолицкого ([4]). Следовательно, и все выражение (12) в случае (а) и при $\mathbf{u} = \mathbf{H}$ имеет вид $R_m(\mathbf{H})$. Аналогичное рассуждение можно провести и в случае (б). Таким образом, показана правильность равенства (11) при $\mathbf{u} = \mathbf{H}$. Тем же способом показывается справедливость (11) и в случае $\mathbf{u} = \mathbf{E}$.

В заключение приношу глубокую благодарность О. А. Ладыженской за руководство и детальное обсуждение.

Поступило
25 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. М. Волков, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, № 3 (1951). [2] Д. М. Волков, Вестн. ЛГУ, № 2 (1952). [3] О. А. Ладыженская, ДАН, 79, № 6 (1951). [4] Х. Л. Смолицкий, ДАН, 73, № 2 (1950).