Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

А. ПОЛАК

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ОТКРЫТЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 30 I 1953)

Ниже устанавливается одно, на первый взгляд чисто метрическое, свойство аналитических функций, которое, однако, в своей основе заключает топологические закономерности, присущие открытым отображениям весьма общей природы.

Назовем точку z_0 однократной точкой однозначной аналитической функции $f(z)$, если для всех z, отличных от z_0, $f(z) \neq f(z_0)$.

Теорема 1. *Пусть z_0 — однократная точка однозначной аналитической функции $f(z)$ и пусть F — множество всех тех точек z' комплексной плоскости, в которых значение функции удовлетворяет условию*

$$|f(z') - f(z_0)| \leqslant a, \quad 0 < a < \infty.$$

Пусть множество F есть континуум и лежит в области аналитичности функции $f(z)$; пусть d — наибольшее из расстояний между точками множества F, в которых функция принимает равные значения.*

Тогда для каждого положительного числа d', меньшего d, найдется такое значение w функции $f(z)$ ($|w - f(z_0)| \leqslant a$), что наибольшее расстояние между точками области, в которых принимается значение w, в точности равно d'.

Доказательство основывается на теореме из теории открытых отображений компактов, которая была мною доказана в [1]. Привожу ее без доказательства.

Теорема 2. *Если в данном открытом отображении континуума K на K' наименьший и наибольший диаметры прообразов точек суть d_1 и d_2, то для всякого d, удовлетворяющего условию $d_1 < d < d_2$, существует точка в K', прообраз которой имеет диаметр d.*

Доказательство теоремы 1. Множество F, согласно условиям теоремы, лежит в области, в которой функция аналитична. Благодаря известному свойству аналитических функций, функция $f(z)$ реализует непрерывное и открытое отображение этой области. Множество F есть полный прообраз в этом отображении круга с центром в точке $w_0 = f(z_0)$ радиуса a. Легко видеть, что отображение $f(z)$ будет открытым и на F. Но F есть континуум. Значит, к множеству F и функции $f(z)$ применима теорема 2.

Прообразы точек в отображении $f(z)$ замкнуты. На основе известного свойства замкнутых ограниченных множеств, на каждом прообразе

* Т. е. связный компакт.

существует пара точек, расстояние между которыми равно диаметру этого прообраза. Прообраз точки w_0 есть z_0, т. е. диаметр этого прообраза равен 0. Применяя теорему 2, получаем, что для каждого d', $0 < d' < d$, должно найтись такое w, что прообраз $f^{-1}(w)$ имеет диаметр, равный d', что и требовалось доказать.

Условия, наложенные на функцию $f(z)$ и множество F в нашей теореме, вполне естественны. Можно привести много примеров функций, у которых соответствующее множество F связно. К числу таких функций относится, например, функция $w = z^2$.

Полученный результат допускает следующую геометрическую интерпретацию.

Пусть $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда имеет место следующее утверждение. Круг, радиус которого не превышает d, с центром на множестве F всегда можно так расположить на комплексной плоскости, что значение функции w в центре круга будет также приниматься функцией хоть в одной точке границы круга, но зато не будет нигде приниматься за пределами этого круга.

Поступило
22 XII 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Полак, ДАН, 1 (10), № 4 (1936).