

Член-корреспондент АН СССР Л. А. ЛЮСТЕРНИК

**О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫХ
АППРОКСИМАЦИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА**

Конечноразностные аппроксимации дифференциальных операторов обладают некоторыми «паразитическими» свойствами, принадлежащими скорее данной аппроксимации, чем исходному оператору. В работе автора ⁽¹⁾ с этой точки зрения рассматривались оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и его простейшая конечноразностная аппроксимация, которую мы ниже обозначаем через S_1 . Собственные элементы этого аппроксимирующего оператора, отвечающие его наибольшим собственным числам, аппроксимируют первые собственные функции оператора Лапласа при аналогичных граничных условиях. Наоборот, собственные элементы, отвечающие наименьшим — отрицательным собственным значениям аппроксимирующего оператора, носят «паразитический» характер и, как мы увидим ниже, зависят от выбора аппроксимирующего оператора. Между тем они, как отмечалось в ⁽¹⁾, влияют на сходимость и расходимость процессов, в которых эти аппроксимации участвуют. В настоящей заметке рассматривается с этой точки зрения более широкий класс сетчатых аппроксимаций оператора Лапласа.

Обозначим через S оператор, превращающий функцию $f(A) = f(x, y)$ в функцию $Sf(A) = \sum_B c(A, B) f(B)$, где для каждой точки A лишь для конечного числа точек B $c(A, B) \neq 0$; будем в дальнейшем полагать, что $c(A, B) \geq 0$, $\sum_B c(A, B) = 1$, $c(A, A) = 0$ и, наконец, $c(A, B) = c(B, A)$. Точка B , для которой $c(A, B) > 0$, называется соседней к точке A .

Оператор S назовем *точечно-постоянным*, если $c(A, B)$ зависит только от разности $B - A$: $c(A, B) = d(B)$. Оператор S примет вид:

$$Sf(A) = \sum_i c_i f(A + A_i), \quad \text{где } c_i = d(A_i).$$

Имеем:

$$d(A_i) = c(A, A + A_i) = c(A + A_i, A_i) = d(-A_i).$$

Таким образом, вместе с точкой $A + A_i$ соседней к A является точка $A - A_i$. Оператор S обладает осевой системой, если $d(A_1) = d(\bar{A}_1)$, где $A_1 = (x_p, y_p)$, $\bar{A}_1 = (-x_p, y_p)$. В этом случае $d(A_1) = d(\bar{A}_1) = d(-A) = d(-\bar{A}_1)$.

Через оператор S определяем конечноразностный аналог оператора Лапласа $\frac{S-1}{Mh^2} f(A) \approx \Delta f(A)$ (в том случае, когда $\sum c_i = 1$, $\sum c_i x_i^2 = \sum c_i y_i^2 = 2Mh$, где $A_i = (x_i, y_i)$).

Рассмотрим сети I_h и Π_h , состоящие, соответственно, из квадратов или равносторонних треугольников стороны h ; через H обозначим гильбертово пространство, порожденное всеми почти периодическими функциями $\varphi(A)$, определенными в узлах A сети I_h (Π_h), причем для $\varphi \subset H$, $\psi \subset H$

$$(\varphi, \psi) = \text{средн. знач. } \varphi(A) \psi(A).$$

Если $Sf(A) \subset H$, то S есть ограниченный самосопряженный оператор из H в H . Это будет, в частности, если S есть точно-постоянный оператор.

В последнем случае функции $\cos(\alpha x \pm \beta y)$, $\sin(\alpha x \pm \beta y)$ образуют полную систему собственной функции оператора S , а число $\lambda(\alpha, \beta) = \sum c_i \cos(\alpha x_i \pm \beta y_i)$ — соответственные собственные значения. Если S обладает осевой симметрией, то полную систему собственных функций образуют функции $\cos \alpha x \cdot \cos \beta y$; $\cos \alpha x \cdot \sin \beta y$; $\sin \alpha x \cdot \cos \beta y$; $\sin \alpha x \cdot \sin \beta y$; $\lambda(\alpha, \beta) = \sum c_i \cos \alpha x_i \cdot \cos \beta y_i$. Верхняя граница спектра S равна 1 (единица есть собственное значение, отвечающее собственной функции — константе). Нижнюю границу спектра S обозначим через $\mu(S)$. Число $\mu(S)$ всегда отрицательно.

Если S точно-постоянный, то

$$\mu(S) = \min_{\alpha, \beta} \lambda(\alpha, \beta).$$

Примеры. Обозначим $l_{i,n} = \left(\cos \frac{i2\pi}{n}, \sin \frac{i2\pi}{n} \right)$.

Для сети I_h рассмотрим операторы:

$$1) S_1 f(A) = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 f(A + h l_{i,4}) = \left(1 + \frac{h^2}{4} \Delta \right) f(A) + O(h^4); \quad \lambda(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} (\cos \alpha h + \cos \beta h); \quad \lambda(S_1) = -1 \text{ (см. (1)); } M = \frac{1}{4};$$

$$2) S_2 f(A) = \frac{1}{5} \sum_{i=0}^3 f(A + h l_{i,4}) + \frac{1}{20} \sum_{i=0}^3 f(A + \sqrt{2} h l_{i+1/2,4}) = \left(1 + \frac{3}{10} h^2 \Delta + \frac{1}{40} h^4 \Delta^2 \right) f(A) + O(h^6); \quad \lambda(\alpha, \beta) = \frac{1}{5} (2 \cos \alpha h + 2 \cos \beta h + \cos \alpha h \cdot \cos \beta h); \quad \mu(S_2) = -\frac{3}{5}; \quad M = \frac{3}{10}.$$

Для сети Π_h рассмотрим операторы:

$$3) S_3 f(A) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^5 f(A + h l_{i,6}) = \left(1 + \frac{h^2}{4} \Delta + \frac{h^4}{64} \Delta^2 \right) f(A) + O(h^6); \quad \lambda(\alpha, \beta) = \frac{1}{6} \left(2 \cos \alpha h + 4 \cos \frac{\alpha}{2} h \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \beta h \right); \quad \mu(S_3) = -\frac{1}{2}; \quad M = \frac{1}{4};$$

$$4) S_4 f(A) = \frac{9}{56} \sum_{i=0}^5 f(A + h l_{i,6}) + \frac{1}{168} \sum_{i=0}^5 f(A + \sqrt{3} h l_{i+1/2,6}) = \left(1 + \frac{15}{56} h^2 \Delta + \frac{9}{448} h^4 \Delta^2 + \frac{3}{3584} h^6 \Delta^3 + O(h^8); \quad \lambda(\alpha, \beta) = \frac{1}{168} \left[54 \cos \alpha h + 108 \cos \frac{\alpha}{2} h \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \beta h + 2 \cos \sqrt{3} \beta h + 4 \cos \frac{3}{2} \alpha h \cdot \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \beta h \right]; \quad \mu(S_4) = -\frac{25}{56}; \quad M = \frac{15}{56}.$$

Конечную замкнутую область Q будем называть принадлежащей сети I_h (Π_h), если Q состоит из конечного числа квадратов (треугольников) сети. В этом случае Q принадлежит всем сетям $I_{h2^{-n}}$ ($\Pi_{h2^{-n}}$), получаемых подразбиением квадратов (треугольников) сети I_h (Π_h). Узел A сети I_h (Π_h) называется внутренним узлом Q относительно оператора S , если вместе с узлом A в Q входят все соседние с A узлы $A + A_i$. Остальные узлы B сети I_h (Π_h), принадлежащие Q , называются граничными узлами Q .

Будем рассматривать функции $\varphi(A)$, определенные в узлах сети $I_h(\Pi_h)$, принадлежащих Q , и равные 0 в граничных узлах. Совокупность таких функций будем обозначать через $H(Q, h)$. Оператор S , определенный в H , порождает оператор (конечномерный) $S(Q, h)$, переводящий $H(Q, h)$ в $H(Q, h)$. Именно, для внутреннего узла A $S(Q, h)\varphi(A) = S\varphi(A)$; в граничных узлах B $S(Q, h)\varphi(B) = \varphi(B) = 0$. Рассмотрим наименьшее собственное значение $\mu(S, Q, h)$ и наибольшее значение $M(S, Q, h)$ оператора $S(Q, h)$.

Теорема. *Выполняется неравенство $1 > M(S, Q, h)$; $\mu(S) < \mu(S, Q, h)$; при $h \rightarrow \infty$, $\mu(S, Q, h)$ стремится к $\mu(S)$, $M(S, Q, h)$ стремится к 1.*

Следствие. Будем решать систему уравнений $\varphi(A) = S\varphi(A)$, где A — внутренний узел Q и $\varphi(B)$ определено для каждого граничного узла h (конечноразностный аналог задачи Дирихле для уравнения Лапласа). Полагая $\varphi_0(A)$ определенной произвольно во внутренних узлах A и обозначая $\varphi_0(B) = \varphi_n(B) = \varphi(B)$,

$$\varphi_{n+1}(A) = \frac{S\varphi_n(A) - \alpha\varphi_n(A)}{1 - \alpha}, \quad (1)$$

получим: при $\alpha \leq \frac{1 + \mu(S)}{2}$ последовательность $\varphi_n(A)$ стремится к решению $\varphi(A)$ нашей системы. При $\alpha > \frac{1 + \mu(S)}{2}$ и достаточно малом h последовательность $\varphi_n(A)$ расходится.

Пример. Для $S = S_3$ итерационный процесс сходится при $\alpha \leq 1/4$. В частности, при $\alpha = 1/8$ получаем сходящийся процесс:

$$\varphi_{n+1}(A) = \frac{\sum_{i=1}^6 \varphi(A + hI_{i,6}) - \varphi(A)}{5}.$$

О сетчатых аппроксимациях решения уравнений $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$. Рассматриваются смешанные задачи для области Q с нулевыми краевыми условиями.

Пусть задан конечноразностный аналог Δ_h оператора Лапласа, определенный уравнением для сети $I_h(\Pi_h)$ через оператор осреднения S : $\Delta_h = \frac{1}{Mh^2}(S - 1)$.

Первые собственные функции оператора Лапласа Δ для области Q , принадлежащей некоторой сети $I_h(\Pi_h)$, аппроксимируются при достаточно малом h первыми собственными элементами оператора Δ_h . Заменим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \varphi(A, t)}{\partial t} = \Delta \varphi(A, t) \quad (2)$$

конечноразностным, например:

$$\frac{\varphi_{n+1}(A) - \varphi_n(A)}{\tau} = \frac{S - 1}{Mh^2} \varphi(A), \quad (3)$$

где $\varphi_n(A) = \varphi(A, n\tau)$.

Если $\tau \leq \alpha h^2$, где $\alpha = \frac{2M}{[1 - \mu(S)]}$, то решение разностного уравнения (3) устойчиво (в смысле терминологии статьи (3)); при $h \rightarrow 0$ решение смешанной задачи для (3) стремится к решению соответственной задачи для дифференциального уравнения (2). При $\tau > \alpha h^2$ имеет место неустойчивость и расходимость при $h \rightarrow 0$.

Для определенных выше операторов S_1, S_2, S_3, S_4 имеем следующие значения αh^2 , разделяющие области «устойчивости» и «неустойчивости»: для S_1 $1/4 h^2$ (ср. (2)); для S_2 $3/8 h^2$; для S_3 $1/3 h^2$; для S_4 $10/27 h^2$.

Рассмотрим аналогично гиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 f(A, t)}{\partial x^2} = \Delta \varphi(A, t) \quad (4)$$

и его конечноразностный аналог, например

$$\frac{\varphi_{n+1}(A) - 2\varphi_n(A) + \varphi_{n-1}(A)}{\tau^2} = \frac{S-1}{Mh^2} \varphi(A). \quad (5)$$

Сходимость решения (S) к решению (n) при $h \rightarrow 0$ имеет место, если $\tau \leq h \sqrt{\frac{4\mu}{1-\mu(S)}}$; расходимость — если $\tau > h \sqrt{\frac{4\mu}{1-\mu(S)}}$.

Для приведенных выше операторов S_1, S_2, S_3, S_4 и выбранного разностного аналога оператора $\partial^2 u / \partial x^2$ эти границы области устойчивости и неустойчивости равны, соответственно: $\sqrt{1/2}h, \sqrt{3/5}h, \sqrt{2/3}h, \sqrt{2/3}\sqrt{5/3}h$. При других разностных аппроксимациях левых частей (1) и (3) получили другие критерии устойчивости и сходимости

Поступило
7 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Люстерник, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 20, (1947). ² L. Collatz, Numerische Behandlungen v. Differentialgleichungen, Berlin, 1951. ³ G. G. O'Brien, M. A. Numan, S. Karlan, J. Math. and Phys., 29, 223 (1951).