Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX № 3

МЕХАНИКА

Действительный член Болгарской Академии наук И. ЦЕНОВ

О ПРИНЦИПЕ ГАУССА НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 12 I 1953)

Положим, что геометрическая конфигурация некоторой голономной механической системы определяется совокупностью обобщенных координат $[q_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Тогда, как мы показали в одной из наших предыдущих заметок [1], уравнения движения системы можно написать в виде

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{1}$$

причем

$$K = {}^1/_2 (\ddot{T} - 3\ddot{T}_0) - Q_i \ddot{q}_i. \tag{2}$$

Здесь T — кинетическая энергия системы; T_0 — выражение кинетической энергии, рассматриваемой как функция только самих координат $[q_i]$ и времени t; далее,

$$Q_i = \sum \mathbf{F} \frac{\partial \dot{\mathbf{M}}}{\partial q_i},$$

где через $\mathbf{M}$ обозначены радиусы-векторы точек системы, а $\mathbf{F}$ — активные силы. Там же [1] мы показали, что при движении системы функция K достигает минимума сравнительно со всеми другими движениями, получаемыми при варьировании одних только ускорений $\ddot{q}_i$.

В данной заметке мы показываем, что известный «принцип наименьшего принуждения» Гаусса можно вывести, пользуясь свойствами функции K.

Напишем первоначальное выражение живой силы системы

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{M}}^2, \quad \text{где} \quad \dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}. \tag{3}$$

Составляя непосредственно правую часть в равенстве (2), найдем следующее выражение функции K, опустив члены, не содержащие $[\ddot{q}_i]$:

$$K = \sum \Big[\frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_k} \ddot{q}_k \ddot{q}_i + \\ + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q} \Big(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q\, \partial q_r} \dot{q}_k \dot{q}_r + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} \Big) \ddot{q}_i \Big] - \sum \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \ddot{q}_i, \tag{4}$$

и отсюда

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} = \sum m \Big[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_k} \ddot{q}_k +$$

$$+ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \Big(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_k \partial q_r} \dot{q}_k \dot{q}_r + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_k \partial t} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2} \Big) \Big] - \sum \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} = 0. \tag{5}$$

Сравним теперь, как это делается при выводе принципа Гаусса, перемещения точек системы при действии на них различных сил. Рассмотрим в некоторый момент времени точку M со скоростью $\dot{\mathbf{M}}$. На точку действует некоторая активная сила $\mathbf{F}$ и реакция связей $\vec{\Phi}$. Если бы на точку, начиная с данного момента времени, не действовали никакие силы, то она за время dt получила бы по инерции перемещение

$$\overrightarrow{MN} = \dot{\mathbf{M}}\, dt. \tag{6}$$

Если же на точку стала бы действовать только активная сила $\mathbf{F}$, то она получила бы другое перемещение:

$$\overrightarrow{MS} = \dot{\mathbf{M}}\, dt + {}^1\!/_2\, \mathbf{a}\, dt^2, \tag{7}$$

где $\mathbf{a}$ — соответствующее ускорение.

Наконец, в действительном движении при наличии связей точка получила бы перемещение $\overrightarrow{MP}$, причем $\overrightarrow{NP}$ представляет отклонение действительного движения несвободной точки M от ее фиктивного прямолинейного и равномерного движения.

Следовательно,

$$\overrightarrow{NP} = {}^1\!/_2\, \ddot{\mathbf{M}}\, dt^2, \tag{8}$$

откуда

$$m\ddot{\mathbf{M}} = \frac{2\overrightarrow{NP}}{dt^2} = \mathbf{F} + \vec{\Phi}. \tag{9}$$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{NS}$, выражающий отклонение движения свободной материальной точки от ее инерциального движения. Для этого вектора можно написать выражение

$$\overrightarrow{NS} = {}^1\!/_2\, \mathbf{a}\, dt^2, \tag{10}$$

где $\mathbf{a}$ есть ускорение свободной точки, вызываемое силой $\mathbf{F}$. Следовательно,

$$m\mathbf{a} = \frac{2m\overrightarrow{NS}}{dt^2} = \mathbf{F}. \tag{11}$$

Из (9) и (11) получим

$$\frac{2m(\overrightarrow{NP} - \overrightarrow{NS})}{dt} = \frac{2m\overrightarrow{SP}}{dt^2} = \vec{\Phi}. \tag{12}$$

Но из (9) имеем $\vec{\Phi} = m\ddot{\mathbf{M}} - \mathbf{F}$ и, следовательно,

$$\frac{2m\overrightarrow{SP}}{dt^2} = m\ddot{\mathbf{M}} - \mathbf{F} =$$

$$= m\Big(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_i \partial t} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2}\Big) - \mathbf{F}. \tag{13}$$

Вектор $\overrightarrow{SP}$, выражающий отклонение действительного движения точки от того движения, которое она имела бы, если бы была свободной, и лежит в основе понятия «принуждения точки M», введенного Гауссом. Очевидно, что этот вектор представляет ту часть полного отклонения движения точки от инерциального движения, которое происходит вследствие наличия связей.

Из (13), далее, можно получить

$$\frac{4m^2\overrightarrow{SP}^2}{dt^4} = m^2 \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_k}\ddot{q}_k\ddot{q}_i + 2\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}\left(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_k \partial q_r}\dot{q}_k\dot{q}_r + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_r \partial t}\dot{q}_r + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2}\right)\ddot{q}_i\right] - 2m\mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}\ddot{q}_i +$$

+ члены, не содержащие вторых производных от координат. (14)

Деля на m и суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum m\overrightarrow{SP}^2 = \frac{dt^4}{2}K = \frac{dt^4}{2}\left[\frac{1}{2}(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0) - \sum \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}\ddot{q}_i\right]. \tag{15}$$

В левой части (15) получилось выражение, названное Гауссом «принуждением» системы, которое, как мы видим, выражается через введенную нами функцию K. Но при значениях $[\ddot{q}_i]$, соответствующих действительному движению, функция K, как показывают уравнения движения (1), принимает минимальное значение, откуда и вытекает принцип Гаусса, состоящий в том, что «в каждый момент истинное движение механической системы, находящейся под действием активных сил и подчиненной совершенным связям, отличается от всех кинематически возможных (т. е. допускаемых связями) движений, совершающихся из той же начальной конфигурации с теми же начальными скоростями, тем, что для истинного движения принуждение достигает минимума». При этом все сравниваемые движения отличаются только ускорениями.

Иначе говоря, для действительного движения

$$\delta \sum m\overrightarrow{SP}^2 = 0,$$

причем варьируются только ускорения.

Очевидно, что верно и обратное предложение: исходя из сформулированного только что предложения, можно вывести уравнения движения в форме (1).

Принцип Гаусса применим и для систем с неголономными связями, так как, как мы показали в той же работе ([1]), уравнения движения неголономных систем с линейными связями выражают, что некоторая функция K_l, получающаяся из K путем выражения зависимых ускорений $[\ddot{q}_r]$ через независимые $[\ddot{q}_\alpha]$ по уравнениям связей, достигает экстремума, который должен представить собой минимум, что очевидно из элементарных физических и геометрических соображений.

Наконец, отметим тот факт, что минимальность выражения $\sum m\overrightarrow{SP}^2$ в истинном движении может быть доказана и из следующих простых соображений: работа сил реакций связей должна равняться нулю на каждом перемещении, допускаемом связями. Рассмотрим перемещения: действительные $\overrightarrow{MP}$ и варьированные $\overrightarrow{MP_1}$.

В том и другом случае будем иметь

$$\sum \overrightarrow{\Phi}\cdot\overrightarrow{MP} = \frac{2}{dt^2}\sum m\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{MP} = 0,$$

$$\sum \overrightarrow{\Phi}\cdot\overrightarrow{MP_1} = \frac{2}{dt^2}\sum m\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{MP_1} - 0,$$

откуда

$$\sum \overrightarrow{\Phi}\cdot\overrightarrow{PP_1} = \frac{2}{dt^2}\sum m\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{PP_1} = 0. \qquad (16)$$

С другой стороны,

$$\sum m\overrightarrow{SP_1}^2 = \sum m(\overrightarrow{PP_1} - \overrightarrow{PS})^2 = \sum m\overrightarrow{PP_1}^2 + \sum m\overrightarrow{PS}^2 - 2\sum m\overrightarrow{PS}\cdot\overrightarrow{PP_1},$$

откуда, в силу (16), будем иметь:

$$\sum m\overrightarrow{SP_1}^2 - \sum m\overrightarrow{SP}^2 = \sum m\overrightarrow{PP_1}^2.$$

Таким образом, разность между принуждениями любого смежного истинного движения всегда положительна, откуда вытекает принцип Гаусса и, следовательно, свойство минимальности функции K.

Поступило
19 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ценов, ДАН, 89, № 1 (1953).