Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 24 I 1953)

1. Обозначим через Ω^* множество всех функций ω, удовлетворяющих следующим условиям:

а) ω непрерывна на $[0, \infty]$;

б) $0 < \omega(u') \leqslant \omega(u'')$ при $0 < u' \leqslant u''$;

в) $\omega(0) = 0$.

Если $K > 0$, а p — натуральное число, то обозначим через $\Omega^*_{K,p}$ множество функций $\omega \in \Omega^*$, удовлетворяющих условию:

1) существует константа $u^* = u^*(\omega) > 0$ такая, что

$$\omega(u) \leqslant K n^p \omega\left(\frac{u}{n}\right) \text{ при } 0 < u \leqslant u^*,\ n = 1, 2, \ldots$$

Лемма 1. *Для всякой функции* $\omega \in \Omega^*_{K,p}$ *имеем*

$$\frac{u_1^p}{\omega(u_1)} < 2^p K \frac{u^p}{\omega(u_2)} \quad \textit{при } 0 < u_1 \leqslant u_2 \leqslant {}^1/_2\, u^*.$$

Лемма 2. *Если* $\omega \in \Omega^*_{K,p}$, *то или*

$$\lim_{u \to 0+} \frac{u^p}{\omega(u)} = 0$$

или

$$0 < \varliminf_{u \to 0+} \frac{u^p}{\omega(u)} \leqslant \varlimsup_{u \to 0+} \frac{u^p}{\omega(u)} < \infty.$$

Если $\omega \in \Omega^*_{1,p}$, *то существует конечный предел* $\lim\limits_{u \to 0+} \dfrac{u^p}{\omega(u)} \geqslant 0$.

2. Если E и $\mathscr{E}$ суть два линейные нормированные функциональные пространства, то запись $E \overset{t}{\subset} \mathscr{E}$ означает, что для любого $f \in E$ имеем $f \in \mathscr{E}$ и что существует константа $K > 0$ такая, что для любого $f \in E$ выполнено неравенство $\|f\|_{\mathscr{E}} \leqslant K \|f\|_E$.

Функциональные пространства C и $\breve{L}$ определим как в ([1]). Символ f^α определим как в ([2]). Пространства $\tilde{F}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, 6)$ тоже определим как в ([2]) с той разницей, что в аксиоме 3 указанной работы мы предположим $K_E = 1$, что влечет $\|f^\alpha\|_E = \|f\|_E$ для всех $f \in E$, $-\infty < \alpha < \infty$.

Если p — натуральное число, h — вещественное число, $f(t)$ — функция, определенная при $-\infty < t < \infty$, то $\Delta_h^p f$ означает функцию, определенную формулой

$$\Delta_h^p f(x) \equiv \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} f(x+kh).$$

$\mathfrak{T}$ означает множество всех тригонометрических полиномов, $\mathfrak{T}_n$ — множество всех тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n$; при $T \in \mathfrak{T}$ символ $\Pi(T)$ означает порядок тригонометрического полинома T.

Определение. Если E — пространство типа $\tilde{F}_3$, $\omega \in \Omega^*$, p — натуральное число, $f \in E$, то положим

$$M_{p,\omega,f,E} \equiv \sup_{0<h<\infty} \frac{\|\Delta_h^p f\|_E}{\omega(h)}.$$

Теорема 1. *Пусть D и E суть пространства типа $\tilde{F}_3$, причем $D \overset{t}{\subset} E$, p — натуральное число. Пусть функция ω, последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют следующим условиям*:

а) $\omega \in \Omega_{K,p}^*$, $\lim\limits_{u \to 0+} \dfrac{u^p}{\omega(u)} = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$;

в$_1$) $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_D = 0$; в$_2$) $\|f_n\|_E \leqslant \omega(\varepsilon_n)$;

г) $\|\Delta_h^p f_n\|_E \leqslant \dfrac{\omega(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^p} h^p$ *при* $0 < h < \infty$.

Пусть $\mathscr{E}$ — линейное нормированное пространство, $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность линейных операций из D в $\mathscr{E}$. Тогда:

I. *Если*

$$0 < L \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \|U_n(f_n)\|_{\mathscr{E}} \leqslant \infty,$$

то по любому $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in D$ такая, что

1) $\|f\|_D \leqslant \varepsilon$, $\|f\|_E \leqslant \varepsilon$;

2) $M_{p,\omega,f,E} \leqslant 1$;

3) *для любого элемента* $\mathfrak{f} \in \mathscr{E}$ *имеем*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|\mathfrak{f} - U_n(f)\|_{\mathscr{E}} \geqslant \frac{L}{2^{p+3}K}.$$

II. *Если $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть монотонно убывающая последовательность положительных чисел и*

$$0 < L \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{n<m<\infty} \frac{\|U_m(f_n) - U_n(f_n)\|_{\mathscr{E}}}{\delta_n} \leqslant \infty,$$

то по любому $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in D$ такая, что выполнены условия 1) *и* 2) *в* I *и*

3′) *для любого элемента* $\mathfrak{f} \in \mathscr{E}$ *имеем*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|\mathfrak{f} - U_n(f)\|_{\mathscr{E}}}{\delta_n} \geqslant \frac{L}{2^{p+4}K}.$$

З а м е ч а н и е. Если в I или в II имеем $L=\infty$, то условие $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{u^p}{\omega(u)}=0$ может быть отброшено без нарушения верности результата.

3. С помощью теоремы 1 можно строить примеры в известном смысле «гладких» функций, для которых заданная последовательность линейных операций расходится или не сходится с заданной быстротой.

Важнейший частный случай теоремы 1 есть тот, когда $D\equiv E$. Однако она может быть полезной и в других случаях. Так, используя часть I теоремы 1 в случае $D\equiv\tilde{C}$, $E\equiv\tilde{L}$ можно доказать следующее предложение.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $\omega\in\Omega^*_{K,1}$ *и* $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{u}{\omega(u)}=0$. *Тогда существует функция* $f\in\tilde{C}$ *такая, что*

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h)-f(x)|\,dx=O[\omega(h)] \quad \textit{при } h\to 0+$$

и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, s_n(f,0)=\infty$, *где* $s_n(f)=s_n(f,x)$ *означает n-ю частную сумму ряда Фурье функции* f.

З а м е ч а н и е. Вместе с тем известно, что если $f\in\tilde{C}$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x+h)-f(x)|\,dx=O(h) \quad \textit{при } h\to 0+,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-s_n(f)\|_{\tilde{C}}=0$.

4. О п р е д е л е н и е. Если E — пространство типа $\tilde{F}_6$, r — натуральное число, то обозначим через $E^{(r)}$ множество всех функций $f\in\tilde{C}$, абсолютно непрерывных вместе со своими производными до порядка $r-1$ включительно и таких, что $f^{(r)}\in E$. Пусть еще $E^{(0)}\equiv E$.

О п р е д е л е н и е. Если $\mathcal{E}$ — пространство типа $\tilde{F}_6$, то при $f\in\mathcal{E}$ и натуральном n положим $\mathcal{E}_n(f)=\inf\limits_{T\in\mathfrak{T}_n}\|f-T\|_{\mathcal{E}}$. Другими словами, $\mathcal{E}_n(f)$ есть наилучшее приближение к f по норме пространства $\mathcal{E}$ посредством тригонометрических полиномов порядка не выше n.

Т е о р е м а 3. *Пусть E и $\mathcal{E}$ — пространства типа* $\tilde{F}_6$, $E\overset{t}{\subset}\mathcal{E}$, *$r$ — неотрицательное целое число, p — натуральное число,* $\omega\in\Omega^*_{K,p}$, $\lim\limits_{u\to 0+}\frac{u^p}{\omega(u)}=0$. *Тогда*:

I. *Если* $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ *есть последовательность линейных операций из E в $\mathcal{E}$ такая, что для любой функции $f\in E$ имеем* $U_n(f)\in\mathfrak{T}_{2n-1}$, *то по любому* $\varepsilon>0$ *и любой последовательности натуральных чисел Π найдется функция* $f\in E^{(r)}$ *такая, что*:

1) $\|f\|_{\tilde{C}}\leqslant\varepsilon$, $\|f^{(r)}\|_E\leqslant\varepsilon$;

2) $M_{p,\omega,f,\tilde{C}}\leqslant 1$, $M_{p,\omega,f^{(r)},E}\leqslant 1$;

3) $\overline{\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\Pi}}}\dfrac{\|f-U_n(f)\|_{\mathcal{E}}}{\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)}\geqslant B(\mathcal{E},E,r,p,K)>0$, *где константа B зависит только от обозначенных у нее аргументов.*

II. *По любому* $\varepsilon>0$ *и любой последовательности натуральных чисел Π найдется функция* $f\in E^{(r)}$ *такая, что выполнены условия* 1) *и* 2) *из* I *и*

3') $\overline{\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in\Pi}}} \dfrac{\mathcal{E}_n(f)}{\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)} \geqslant \frac{1}{4} B(\mathcal{E}, E, r, p, K),$

где B — *та же константа, что в* I.

Замечание. Константа B может быть эффективно определена. Например, при $r=0$ и $E\equiv\mathcal{E}\equiv\tilde{C}$ можно взять $B=\dfrac{1}{5\cdot 2^{2(p+1)}K}$, а при $r=0$ и $E\equiv\tilde{C}$, $\mathcal{E}\equiv\tilde{L}$ можно взять $B=\dfrac{1}{2^{2p+4}K\pi}$.

Поступило
16 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Лозинский, ДАН, 61, № 2 (1948). [2] С. М. Лозинский, ДАН, 64, № 4 (1949).