Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

И. Э. ШНОЛЬ

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 12 I 1953)

В настоящей заметке указывается, что при некоторых ограничениях на коэффициент q в уравнении

$$\Delta u + (q - \lambda) u = 0 \tag{1}$$

из существования ограниченного решения этого уравнения следует принадлежность точки λ к спектру оператора L

$$Lu = \Delta u + qu, \tag{2}$$

рассматриваемого во всем R_n.

Ограничения на q состоят в том, что положительная часть q $q^+ = \max(0, q)$ должна расти не слишком быстро, медленнее, чем $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$:

$$q^+(\mathbf{r}) = o(r^2). \tag{3}$$

В конце заметки приводится пример, показывающий, что если q растет быстрее r^2, то уравнение (1) может иметь ограниченные решения при всех λ, а спектр оператора L состоять только из счетного числа точек.

Теорема 1. *Если u — ограниченное решение уравнения*

$$\Delta u + qu = 0 \tag{4}$$

и q удовлетворяет условию (3), *то $\lambda = 0$ является точкой спектра оператора L. Если, кроме того,*

$$\int u^2 dv = +\infty, \tag{5}$$

то $\lambda = 0$ предельная для точек спектра.

Наметим вкратце ход доказательства. При помощи решения u будут построены равные нулю вне некоторой сферы и, значит, принадлежащие $\mathscr{L}^2$ функции, являющиеся «почти собственными» для оператора L, т. е. такие, что

$$\| Lw \| < \varepsilon \| w \|^*$$

при любом сколь угодно малом ε. Это и означает, что $\lambda = 0$ есть точка спектра оператора L. Такую функцию w получим, умножая u на функ-

* $\| \ \|$ означает норму в гильбертовом пространстве, т. е. $\| w \|^2 = \int w^2 dv$. Интеграл берется по всему пространству. $\| \ \|_T$ — норма в гильбертовом пространстве функций, рассматриваемых только внутри шара радиуса T.

цию χ, равную 1 внутри сферы радиуса T, нулю вне сферы радиуса $3T$ и непрерывную со своими двумя производными. Ясно, что χ можно выбрать так, чтобы $|\nabla\chi| < 1/T$ и $|\Delta\chi| < 1/T^2$.

Для такой функции w

$$Lw = 2(\nabla\chi\, \nabla u) + \Delta\chi\, u.$$

Следовательно,

$$\| Lw \| \leqslant 2 \| \nabla\chi\, \nabla u + \| \Delta\chi\, u \|.$$

Так как $\| u \|_T \leqslant \| w \| \leqslant \| u \|_{3T}$, то второй член порядка $\frac{1}{T^2} \| w \|$. Что касается первого члена, то из равенства (4) имеем

$$\int\limits_v |\nabla u|^2 dv = \int\limits_\Sigma 2u \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma + \int\limits_v q u^2 dv, \tag{6}$$

и, если не обращать внимания на поверхностный интеграл, то

$$\int\limits_v |\nabla u|^2 dv \leqslant \int\limits_v q^+ u^2 dv,$$

и, значит, в силу условия (3), $\| \nabla\chi\, \nabla u \| \approx \frac{1}{T} \sqrt{o(T^2)} \| w \|$.

Окончательно получаем

$$\| Lw \| < \frac{o(T)}{T} \| w \| + O\left(\frac{1}{T^2}\right) \| w \|,$$

и, значит, при $T \to \infty$ получаем

$$\frac{\| Lw \|}{\| w \|} \to 0,$$

что и требовалось.

Приведенное доказательство нуждается в уточнении в двух пунктах.

Во-первых, было неявно предположено, что существует C такое, что

$$\| u \|_{3T} < C \| u \|_T$$

при всех рассматриваемых T.

Во-вторых, при оценке $\int |\nabla u|^2 dv$ был откинут поверхностный интеграл.

Эти пробелы восполняются следующими двумя леммами, доказательство которых не содержит существенных трудностей и не приводится за недостатком места.

Лемма 1. *Если $\varphi(T)$ — положительная неубывающая функция, растущая не быстрее некоторой степени T, то существует последовательность T_k такая, что*

$$\frac{\varphi(3T_k)}{\varphi(T_k)} < C.$$

Эта лемма устраняет первую из указанных неточностей, если положить $\varphi(T) = \| u \|_T^2$.

Лемма 2. *Если функция $\varphi(T)$ удовлетворяет условиям леммы 1, то для любой последовательности $T_k \to \infty$ найдется последовательность S_k, $2T_k \leqslant S_k \leqslant 3T_k$, такая, что*

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left[\frac{1}{\varphi(T)} T^{n-1} \frac{d}{dT} T^{1-n} \frac{d\varphi}{dT}\right]_{T=S_k} \leqslant 0.$$

Если положить опять $\varphi(T) = \int\limits_{\|r\| \leqslant T} u^2\, dv$ и учесть, что $\int\limits_{\Sigma_T} 2u \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = T^{n-1} \frac{d}{dT} T^{1-n} \frac{d\varphi}{dT}$, то становится ясно, что второй из указанных недочетов устраняется этой леммой.

Нижеследующий пример показывает, что, хотя условие (1) на q не является необходимым, его существенное ослабление делает утверждение теоремы неверным.

Пример. Определим числа $q_n = 4\pi^2 r_n^2$, где $r_n > r_{n-1}$ — целые числа, и положим

$$q(x) = q_n \text{ при } n \leqslant x < n + 1.$$

Выберем q_n так, чтобы $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{q(x)}} = \infty$; $\int\limits_0^\infty \frac{x\, dx}{q(x)} < +\infty$ (например, положим $q_n = 4\pi^2 [n^2 \ln^2 n]$.

Рассмотрим уравнение $y'' + qy = 0$ на полуоси $(0, \infty)$. Легко показать, что решение y_1 $(y_1'(0) = 0)$ не стремится к 0 и ограниченно, а решение y_2, $y_2(0) = 0$, убывает как $1/\sqrt{q}$: $y_2 \leqslant C/\sqrt{q}$.

Рассмотрим теперь функцию Грина оператора $Ly = y'' + qy$ с начальными данными в 0: $y'(0) = 0$

$$K(s, t) = y_1(t)\, y_2(s), \quad t \leqslant s;$$

$$K(s, t) = y_1(s)\, y_2(t), \quad t \geqslant s;$$

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty |K(s, t)|^2\, ds\, dt = 2 \int\limits_0^\infty ds \int\limits_0^s |K(s, t)|^2\, dt \leqslant 2C \int\limits_0^\infty \frac{s}{q(s)}\, ds < +\infty.$$

Стало быть, обратный оператор вполне непрерывен и L имеет дискретный спектр.

В работе ([1]) доказано, что если $Q > 0$ монотонна, $\int^\infty \frac{dx}{\sqrt{Q}} = +\infty$ и $q(x) \leqslant Q(x)$, то уравнение $y'' + qy = 0$ не может иметь двух решений из $\mathscr{L}^2(0, \infty)$. В этом случае оператор $Ly = y'' + qy$ устойчиво симметричен на полной области существования ($y \in \mathscr{L}^2$, $Ly \in \mathscr{L}^2$).

Иными словами, вместе с q всякая $q_1 \leqslant q$ определяет уравнение $y'' + q_1 y = \lambda_1 y$ с единственной спектральной функцией. Легко видеть, что, наоборот, для любой монотонной $Q(x)$, $\int^\infty \frac{dx}{\sqrt{Q(x)}} < +\infty$, существует $q(x) \leqslant Q(x)$ такая, что уравнение $y'' + qy = 0$ имеет все решения с интегрируемым квадратом и порождает бесконечно много различных спектральных разложений.

Для доказательства воспользуемся конструкцией примера, положив $q_n = 4\pi^2 (r_n + {}^1/_4)^2$, где $q_n \geqslant Q(n)$ и $\sum \frac{1}{\sqrt{q_n}} < +\infty$. Тогда y_1 и y_2 будут порядка $1/\sqrt[4]{q}$ и, стало быть, будут принадлежать $\mathscr{L}^2$.

Поступило
18 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. B. Sears, Canad. J. Math., 2, 314 (1950).