Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. Я. ЛЕВИН

ОПЕРАТОРЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 5 II 1953)

Класс целых функций, являющихся предельными для полиномов, все корни которых лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$, совпадает с множеством целых функций вида

$$\omega(z) = e^{-\gamma z^2}\omega_1(z), \tag{1}$$

где $\gamma \geqslant 0$, а $\omega_1(z)$ — целая функция первого рода, все корни которой лежат в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ и которая удовлетворяет условию

$$|\omega_1(z)| \leqslant |\omega(\bar{z})|, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0. \tag{2}$$

Этот класс функций обозначается P^*. Все функции этого класса, у которых величина $\gamma \leqslant \lambda$ ($\gamma < \lambda$), мы будем обозначать P^*_λ ($P^*_{\lambda-0}$).

Приведенное здесь утверждение совпадает в существенном с теоремой Лагерра — Полиа ([1]).

Определим (подобно тому как это было сделано в ([2])) класс P^* целых функций от нескольких переменных как класс функций вида

$$\omega(z, u) = e^{-\gamma_1 z^2 - \gamma_2 u^2}\omega_1(z, u),$$

где $\gamma_1 \geqslant 0$, $\gamma_2 \geqslant 0$, а $\omega_1(z, u)$ — целая функция первого рода по каждой из переменных при условии, что другая переменная фиксирована в замкнутой нижней полуплоскости. Кроме того, $\omega_1(z, u)$ не имеет корней в области $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Im} u < 0$ и $|\omega_1(z, u)| \geqslant |\omega_1(\bar{z}, u)|$, $|\omega_1(z, u)| \geqslant |\omega_1(z, \bar{u})|$, $|\omega_1(z, u)| \geqslant |\omega_1(\bar{z}, \bar{u})|$ при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$, $\operatorname{Im} u \leqslant 0$, аналогично определяются классы* $P^*_{\lambda, \mu}$, $P^*_{\lambda-0, \mu}$, $P^*_{\infty, \mu}$ и т. д.

Имеет место следующее обобщение теоремы Лагерра — Полиа:

Теорема 1. *Для того чтобы целая функция $\omega(z, u)$ от нескольких переменных была равномерным пределом полиномов $P(z, u)$, не имеющих корней в области $\operatorname{Im} z < 0$, $\operatorname{Im} u < 0$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция принадлежала классу P^*.*

Эта теорема несколько полнее, чем данное нами ранее ([2]) обобщение теоремы Лагерра — Полиа.

Нами было ранее установлено ([2], [3]), что если аддитивный однородный оператор $\mathfrak{B}^*$, определенный на линейной оболочке функций класса P^*, переводит функции класса P^* в функции того же класса, то:

* Мы ограничиваемся функциями от двух переменных для сокращения записи.

1) он определен на всех целых функциях $f(z)$, имеющих майоранту $\omega(z)$, т. е. удовлетворяющих неравенствам

$$|f(z)| \leqslant |\omega(z)|, \quad |(f(\bar{z})| \leqslant |\omega(z)| \quad (\operatorname{Im} z < 0), \tag{3}$$

в которых $\omega(z)$ — некоторая функция класса P^*;

2) оператор $\mathfrak{B}^*$ сохраняет соотношения майорантности, т. е. из (3) следуют неравенства

$$|\mathfrak{B}^*[f(z)]| \leqslant |\mathfrak{B}^*[\omega(z)]|, \quad |\mathfrak{B}^*[f(\bar{z})]| \leqslant |\mathfrak{B}^*[\omega(z)]| \quad (\operatorname{Im} z < 0).$$

В частности, оператор дифференцирования является таким $\mathfrak{B}^*$-оператором, и поэтому приведенная теорема является весьма широким обобщением известной теоремы С. Н. Бернштейна об оценке для производной целой функции конечной степени ([4]).

Стоит отметить, что при некоторых естественных ограничениях, наложенных на оператор, из условий 1) и 2) следует, что оператор отображает класс P^* на себя, т. е. является $\mathfrak{B}^*$-оператором.

В следующей теореме мы дадим общий вид непрерывного $\mathfrak{B}^*$-оператора, причем непрерывным мы считаем оператор, который всякую равномерно сходящуюся в любой конечной области последовательность функций переводит в равномерно сходящуюся *.

Теорема 2. *Всякий непрерывный $\mathfrak{B}^*$-оператор над целой функцией*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

имеет вид

$$\mathfrak{B}^*[f(z)] = f(-D_u)\,\varphi(z, u)\Big|_{u=0} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \frac{\partial^{(k)}\varphi(z, u)}{\partial u^k}\Big|_{u=0}, \tag{4}$$

где D_u — оператор частного дифференцирования по u, а $\varphi(z, u) \in P^*_{\infty, 0}$.

Наоборот, всякий оператор вида (4) при $\varphi(z, u) \in P^*_{\infty, 0}$ есть некоторый $\mathfrak{B}^*$-оператор.

Из этой теоремы, в частности, следует:

Теорема 3. *Всякий непрерывный $\mathfrak{B}^*$-оператор, перестановочный с оператором дифференцирования, имеет вид*

$$\mathfrak{B}^*[f(z)] = \bar{\varphi}(D)\, f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{c}_k f^{(k)}(z),$$

где

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

есть функция класса P^*_0.

В самом деле, из (4) следует, что

$$\mathfrak{B}^*[e^{-\lambda z}] = \varphi(z, \lambda).$$

Кроме того, из перестановочности $\mathfrak{B}^*$-оператора с оператором дифференцирования следует

$$(\mathfrak{B}^*[e^{-\lambda z}])'_z = -\lambda \mathfrak{B}^*[e^{-\lambda z}]$$

* Нам неизвестен пример разрывного $\mathfrak{B}^*$-оператора.

или

$$\varphi_z'(z, u) = -u\varphi(z, u)$$

и

$$\varphi(z, u) = e^{-uz}\psi(u) \quad (\psi(u) \in P_0^*).$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{B}^*(z^n) = \psi(-D)\, z^n,$$

и поэтому

$$\mathfrak{B}^*[f(z)] = \psi(-D)\, f(z).$$

Остается заметить, что $\overline{\psi}(-D) \in P_0^*$.

Теорема 4. *Всякий $\mathfrak{B}^*$-оператор над функцией*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

перестановочный с оператором $z\dfrac{d}{dz}$, имеет вид

$$\mathfrak{B}^*[f(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k c_k z^k, \tag{5}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k, \ldots$ — последовательность множителей 1-го рода, причем все γ_k одного знака.*

В самом деле, положив

$$\varphi_k(z) = \mathfrak{B}^*(z^k),$$

будем иметь

$$z\varphi_k'(z) = k\varphi(z).$$

Следовательно, $\varphi_k(z) = \gamma_k z^k$ и

$$\mathfrak{B}^*[f(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k c_k z^k. \tag{6}$$

Этот оператор переводит всякий полином без корней в нижней полуплоскости в полином того же вида.

Взяв полином

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$$

со всеми положительными корнями и применив оператор $\mathfrak{B}^*$ к полиному $P(e^{i\gamma}z)$ $(-\pi < \gamma < 0)$, мы убедимся в том, что этот оператор переводит всякий полином с положительными корнями в полином с положительными корнями. Отсюда легко следует, что числа $\{\gamma_k\}$

---

* Понятие, введенное Полиа и Шуром ([5]). Последовательность чисел $\{\gamma_k\}$ называется последовательностью множителей 1-го рода, если всякий полином $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ со всеми вещественными корнями переходит при операции $\Gamma[P(z)] = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k z^k$ в полином со всеми вещественными корнями.

образуют последовательность множителей 1-го рода и одного знака. Нетрудно также доказать и обратное, т. е., что если $\{\gamma_k\}$ есть последовательность множителей 1-го рода и все они одного знака, то равенство (5) определяет $\mathfrak{B}^*$-оператор $\Gamma(f(z))$, перестановочный с оператором $z\frac{d}{dz}$.

Теоремы 2, 3 и 4 естественно переносятся на случай целых функций от нескольких переменных.

Для целых функций класса P (т. е. класса P^* и конечной степени) аналогичные теоремы были нами доказаны раньше ([6]).

Харьковский горный институт

Поступило 1 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Lindward, G. Polya, Rend. circ. math. Palermo, **37**, 297 (1914). [2] Б. Я. Левин, ДАН, **78**, № 6 (1951). [3] Б. Я. Левин, ДАН, **78**, № 5 (1951). [4] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, гл. III, §§ 10 и 11, 1937. [5] G. Polya, I. Schur, Z. f. reine u. angew. Math., **144** (1914). [6] Б. Я. Левин, ДАН, **79**, № 3 (1951).