Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

А. В. ПОГОРЕЛОВ

О ВНЕШНЕЙ КРИВИЗНЕ ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 I 1953)

В ряде работ А. Д. Александров построил теорию двумерных метрических многообразий ограниченной кривизны (1-5).

Двумерное многообразие Ф называется многообразием ограниченной кривизны, если его метрика внутренняя, т. е. расстояние между любыми его точками совпадает с нижней гранью длин кривых, соединяющих эти точки, и у каждой точки X есть окрестность G такая, что для всякой конечной совокупности попарно неперекрывающихся треугольников $T_i \subset G$ $\Sigma |\omega(T_i)| \leqslant c(G)$, где $\omega(T_i)$ — разность между суммой верхних углов треугольника T_i и π (1).

Для двумерных многообразий ограниченной кривизны, несмотря на общность условий, которыми они определены, сохраняются основные понятия, относящиеся к регулярным поверхностям. В частности, существуют геодезические линии, угол между любой парой геодезических в общей точке, площадь и интегральная кривизна любого компактного множества. Класс двумерных многообразий ограниченной кривизны достаточно обширен: он содержит все выпуклые поверхности, все дважды непрерывно дифференцируемые поверхности, поверхности ПРВ (5) (так называются поверхности, которые в достаточно малой окрестности каждой точки при подходящем выборе осей координат допускают представление $z = z_1(x, y) - z_2(x, y)$, где $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — выпуклые функции) и рассмотренные И. Я. Бакельманом (6) поверхности ограниченного искривления.

В настоящей заметке будет дано внешнее определение кривизны гладкой поверхности, не подчиненной дальнейшим предположениям регулярности, и в связи с этим будет введен в рассмотрение широкий (нам кажется, предельно широкий) класс гладких поверхностей, являющихся многообразиями ограниченной кривизны.

Поверхность Ф называется гладкой, если у каждой точки этой поверхности есть окрестность, в которой поверхность допускает гладкую параметризацию $r = r(u, v)$, где $r(u, v)$ — вектор-функция, обладающая непрерывными производными по u и v, удовлетворяющими условию $r_u \times r_v \neq 0$. Пусть F — замкнутое множество на гладкой поверхности. Его сферическое изображение также будет замкнутым множеством, а следовательно, имеет определенную площадь $\bar{s}(F)$ (лебегову меру).

Определим абсолютную внешнюю кривизну произвольного множества на гладкой поверхности Ф. Начнем с открытых множеств. Пусть

G — открытое множество и $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — конечная система замкнутых множеств, удовлетворяющих условиям:

$$F_k \subset G, \quad F_i \cap F_j = 0. \qquad (*)$$

Абсолютной внешней кривизной открытого множества G мы будем называть величину

$$\sigma^0(G) = \sup_{(*)} \sum_k \bar{s}(F_k),$$

где sup берется по всем конечным системам замкнутых множеств F_k, удовлетворяющих условиям (*). Абсолютную внешнюю кривизну произвольного множества M определим равенством

$$\sigma^0(M) = \inf_{M \subset G} \sigma^0(G).$$

В случае регулярной поверхности абсолютная внешняя кривизна измеримого множества M равна интегралу от модуля гауссовой кривизны поверхности по площади множества M.

С помощью функции множества σ^0 естественно вводятся еще три функции множеств: σ^+, σ^- и σ.

Определим множества Φ^+ и Φ^- на гладкой поверхности Φ. Точку X поверхности Φ отнесем множеству Φ^+, если у точки X есть окрестность, все точки которой располагаются с одной стороны касательной плоскости поверхности в точке X. Если же такой окрестности не существует, т. е. найдутся сколь угодно близкие к X точки поверхности, расположенные по разные стороны от касательной плоскости в точке X, то X отнесем множеству Φ^-. Очевидно, таким образом каждая точка поверхности будет отнесена одному из множеств Φ^+ или Φ^-. Легко показать, что Φ^+ является множеством типа F_σ, т. е. допускает представление в виде суммы не более чем счетной совокупности замкнутых множеств, а Φ^- — множеством типа G_δ, т. е. допускает представление в виде пересечения не более чем счетной совокупности открытых множеств. Таким образом, Φ^+ и Φ^- суть борелевские множества.

Функции множеств σ^+, σ^- и σ определяются равенствами

$$\sigma^+(M) = \sigma^0(M \cap \Phi^+), \quad \sigma^-(M) = \sigma^0(M \cap \Phi^-), \quad \sigma(M) = \sigma^+(M) - \sigma^-(M).$$

Мы будем называть их, соответственно, положительной внешней кривизной, отрицательной внешней кривизной и просто внешней кривизной множества M на поверхности Φ.

Если Φ — регулярная поверхность, а M — измеримое множество на Φ и M^+, M^- — подмножества множества M, где гауссова кривизна k поверхности положительна или, соответственно, отрицательна, то

$$\sigma^+(M) = \iint_{M^+} k\,ds, \quad \sigma^-(M) = -\iint_{M^-} k\,ds, \quad \sigma(M) = \iint_M k\,ds.$$

В связи с данным выше определением понятия внешней кривизны естественно вводятся поверхности ограниченной внешней кривизны. Именно, гладкую поверхность Φ мы будем называть поверхностью ограниченной внешней кривизны, если у каждой точки этой поверхности существует окрестность G с ограниченной абсолютной кривизной $\sigma^0(G)$. Аналогично определяются гладкие поверхности с ограниченной положительной внешней кривизной и гладкие поверхности с ограниченной отрицательной внешней кривизной.

Теорема 1. *На гладкой поверхности ограниченной внешней кривизны функции множеств σ^0, σ^+, σ^- имеют конечные значения для любого компактного множества, неотрицательны и вполне аддитивны в кольце борелевских множеств на поверхности.*

Теорема 2 (Основная). *Гладкие поверхности ограниченной положительной внешней кривизны (в частности, поверхности ограниченной внешней кривизны) допускают в малом (т. е. в достаточно малой окрестности каждой точки) равномерное приближение регулярными поверхностями с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами.*

Теорема 3. *Гладкие поверхности ограниченной положительной внешней кривизны (в частности, просто поверхности ограниченной внешней кривизны) суть многообразия ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова.*

Теорема 3 следует из теоремы 2 и одной теоремы А. Д. Александрова о многообразиях ограниченной кривизны ([1]).

Относительно гладкой поверхности Ф говорят, что она имеет локально однозначное сферическое изображение, если у каждой точки этой поверхности есть окрестность, которая нормалями взаимно-однозначно отображается на единичную сферу.

Теорема 4. *Гладкая поверхность с локально однозначным сферическим изображением является поверхностью с ограниченной внешней кривизной, а следовательно, будет многообразием ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова.*

Поверхность Ф называется поверхностью обобщенной отрицательной кривизны, если не существует поверхности Ф′ с плоским краем, являющейся частью поверхности Ф (от поверхности Ф никакой плоскостью нельзя отрезать «горбушку»). Регулярные поверхности с отрицательной гауссовой кривизной являются поверхностями обобщенной отрицательной кривизны.

Теорема 5. *Гладкие поверхности обобщенной отрицательной кривизны имеют равную нулю положительную внешнюю кривизну, а следовательно, являются многообразиями ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова.*

Ввиду краткости изложения мы лишены возможности привести доказательство основного результата (теоремы 2), из которого остальные получаются более или менее просто.

Поступило
5 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Александров, ДАН, **60**, № 9 (1948). [2] А. Д. Александров, ДАН, **63**, № 4 (1948). [3] А. Д. Александров, ДАН, **69**, № 6 (1949). [4] А. Д. Александров, ДАН, **70**, № 4 (1950). [5] А. Д. Александров, ДАН, **72**, № 4 (1950). [6] И. Я. Бакельман, ДАН, **82**, № 4 (1952).