Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ и Я. Б. РУТИЦКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 II 1953)

Общие принципы функционального анализа позволяют исследовать уравнение $\varphi = \lambda H\varphi$ (H — нелинейный оператор), когда H — оператор, вполне непрерывный в некотором функциональном пространстве. Более тонкие теоремы (о точках бифуркации, об устойчивости решений, собственных функциях и т. д.) удается установить, когда H — дифференцируемый оператор.

В настоящей заметке мы исследуем оператор

$$H\varphi(x) = \int_G K(x, y) f[y, \varphi(y)]\, dy, \tag{1}$$

где G — компактное множество n-мерного пространства. Оказывается, что операторы (1) с широкими классами ядер $K(x, y)$ и нелинейных функций $f(x, u)$ могут быть изучены при помощи пространств Орлича ([1], [2]) (см. также ([3])). Доказательства излагаемых теорем используют результаты, изложенные в ([3-7]).

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что при любом α

$$\int_G \int_G M[\alpha K(x, y)]\, dx\, dy < \infty, \tag{2}$$

где $M(u)$ — некоторая N'-функция. Относительно нелинейной функции $f(x, u)$ предположим, что она удовлетворяет условию

$$|f(x, u)| \leqslant a(x) + R(|u|) \quad (x \in G, \ -\infty < u < \infty), \tag{3}$$

где $a(x) \geqslant 0$, а $R(u)$ — монотонно возрастающая неотрицательная функция.

Теорема 1. *Для того чтобы условия* (2) *и* (3) *гарантировали, что оператор* (1) *действует в каком-либо шаре некоторого пространства Орлича, необходимо, чтобы при больших и выполнялось условие*

$$R(u) < \alpha N^{(-1)}[M(\beta u)], \tag{4}$$

где α, β — *положительные постоянные,* $N^{(-1)}(u)$ — *функция, обратная к* N'-*функции* $N(v)$, *дополнительной к* $M(u)$, *а функция* $a(x)$ *принадлежала* L_N^*.

Из дальнейшего видно, что в основных случаях условие (4) является достаточным для полной непрерывности оператора (1) в единичном шаре некоторого пространства Орлича.

Теорема 2. *Пусть функция $N'(v)$ удовлетворяет Δ'-условию. Пусть в условии (3) $a(x) \in L_N$. Пусть выполнено условие (4). Тогда оператор (1) вполне непрерывен в некотором шаре пространства L_M^*.*

Теорема 2 охватывает случаи, когда функция $M(u)$ из условия (2) растет при $u \to \infty$ быстрее некоторой функции $|u|^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

N'-функции $M(u)$ и $M_1(u)$ будем называть эквивалентными и писать $M(u) \sim M_1(u)$, если $L_M^* = L_{M_1}^*$. Будем говорить, что N'-функция удовлетворяет Δ_3-условию, если $M(u) \sim uM(u)$ (например, функции, при больших значениях u равные, соответственно, e^u, e^{u^2}, $u^{\ln u}$ и т. д.).

Теорема 3. *Если N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3-условию, то дополнительная к ней N'-функция $N(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, причем $M(u) \sim N[M(u)]$ и при больших значениях v*

$$\alpha |v| M^{(-1)}(|v|) \leqslant N(v) \leqslant \beta |v| M^{(-1)}(|v|),$$

где α, $\beta > 0$, а $M^{(-1)}(u)$ — функция, обратная к $M(u)$.

Функция $|v| M^{(-1)}(|v|)$ будет, в частности, N'-функцией, если при больших v справедливо неравенство $2[M'(v)]^2 - M(v)M''(v) \geqslant 0$.

Когда функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3-условию, то условие (4) эквивалентно выполнению при больших u неравенства

$$R(u) < M(\beta u) \quad (\beta > 0). \tag{5}$$

Теорема 4. *Пусть функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3-условию, а дополнительная к ней N'-функция — Δ'-условию. Пусть $\int\limits_G a(x) M^{(-1)}[a(x)]\,dx < \infty$. Пусть выполнено условие (5). Тогда оператор (1) вполне непрерывен в некотором шаре пространства L_M^*.*

Условиям теоремы 4 удовлетворяет, например, оператор (1), если

$$\int\limits_G \int\limits_G e^{\alpha|K(x,\,y)|}\,dx\,dy < \infty, \qquad |f(x,\,u)| < a(x) + e^{b|u|},$$

$$\int\limits_G a(x) \ln[a(x) + 1]\,dx < \infty.$$

Если функция $M(u)$ при $u \to \infty$ растет медленнее любой степенной, то (без существенного ограничения общности) можно предполагать, что $N(v)$ удовлетворяет Δ_3-условию. В этом случае условие (4) эквивалентно выполнению при больших u неравенства

$$R(u) < \alpha M(u) \,/\, u \quad (\alpha > 0). \tag{6}$$

Теорема 5. *Пусть функция $N(v)$, дополнительная к $M(u)$, удовлетворяет Δ_3-условию. Пусть $a(x) \in L_N^*$. Пусть выполнено условие (6). Тогда существует такое пространство Орлича, в котором оператор (1) действует и вполне непрерывен.*

Условиям теоремы 5 удовлетворяет, например, оператор (1), если

$$\int\limits_G \int\limits_G |K(x,\,y)| \ln[|K(x,\,y)| + 1]\,dx\,dy > \infty,$$

$$|f(x,\,u)| < a(x) + b\ln(|u| + 1), \qquad \int\limits_G e^{|a(x)|}\,dx < \infty.$$

Пространство Орлича, в котором действует оператор (1) в условиях теоремы 5, конструируется по ядру $K(x, y)$. Можно показать, что нет такого универсального пространства Орлича, в котором бы действовали и были непрерывны все операторы (1), удовлетворяющие условиям теоремы 6.

Оператор (1) представим в виде $H = Af$, где A — линейный интегральный оператор, порожденный ядром $K(x, y)$, а $f\varphi(x) = f[x, \varphi(x)]$. Для выяснения условий дифференцируемости оператора (1) нужно вначале выяснить условия дифференцируемости оператора f.

Пусть оператор f действует из шара $T \subset \overset{*}{L}_{M_1}$ и $\overset{*}{L}_{M_2}$ и имеет в точке $\varphi_0 \in T$ производную Фреше f_1. Если почти при всех $x \in G$ существует производная $f'_u[x, \varphi_0(x)]$, то, очевидно, $f_1\varphi(x) = f'_u[x, \varphi_0(x)]\varphi(x)$. Ниже мы будем предполагать, что выполнено неравенство

$$|f[x, \varphi_0(x) + u] - f[x, \varphi_0(x)] - f_u[x, \varphi_0(x)]\,u| \leqslant P(|u|)$$
$$(x \in G, \ -\infty < u < \infty), \tag{7}$$

где $P(|u|)$ — некоторая неотрицательная функция.

Теорема 6. *Чтобы условие (7) могло гарантировать дифференцируемость оператора f (если $P(u) \not\equiv 0$), необходимо, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ при больших u выполнялось неравенство $M_2(u) > M_1(\varepsilon u)$.*

Условие теоремы 6, в частности, выполняется, если $M_1(u) = M_2[Q(u)]$, где $Q(u)$ — некоторая N'-функция.

Теорема 7. *Пусть оператор f действует из некоторой окрестности точки $\varphi_0(x) \in \overset{*}{L}_{M_1}$ в классе L_{M_2}. Пусть выполнено условие (7), причем функция $P(u)$ непрерывна и порождает оператор $\mathcal{P}$ $\mathcal{P}\varphi(x) = P[\varphi(x)]$, действующий из некоторой окрестности нуля θ пространства $\overset{*}{L}_{M_1}$ в класс L_{M_2}. Пусть, кроме того, функция $P(u)$ удовлетворяет условиям:* а) $P(0) = 0$, $P'(0) = 0$; б) *существуют такие $r > 1$ и μ, $\nu > 0$, что при больших u_1, u_2 из $u_1 < u_2$ следует $R(u_1) / u_1^r < \mu R(\nu u_2) / u_2^r$. Тогда оператор f имеет в точке $\varphi_0(x)$ производную Фреше f_1.*

Условие б) очевидным образом выполняется, если при больших значениях u функция $P(u)$ совпадает с некоторой N'-функцией, удовлетворяющей Δ_3-условию. Другими примерами функций $P(u)$, удовлетворяющих условиям теоремы, могут служить функции $|u|^r$, $|u|^r(\ln|u|+1)$ $(r > 1)$.

Теорема 8. *Пусть выполнено условие (2), в котором функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_3-условию, а дополнительная к ней N'-функция $N(\nu)$ — Δ'-условию. Пусть выполнено условие (3), в котором $a(x) \equiv a > 0$, а $R(u) = M(bu)$ $(b > 0)$. Пусть выполнено условие (7), в котором $\varphi_0(x) \equiv 0$ и непрерывная функция $P(u)$ порождает оператор, действующий из некоторой окрестности нуля θ пространства $\overset{*}{L}_M$ в пространство $\overset{*}{L}_N = L_N$, причем $P(0) = P'(0) = 0$.*

Тогда вполне непрерывный оператор (1) определен в окрестности нуля пространства $\overset{*}{L}_M$ (с множеством значений в $\overset{*}{L}_M$) и имеет в точке θ производную Фреше $D = Af$

$$D\varphi(x) = \int_G K(x, y)\, f'_u(y, 0)\, \varphi(y)\, dy. \tag{8}$$

Для оператора (1), действующего в L^p, приведем более конкретный признак, который проще получить непосредственно, чем ссылкой на теорему 7.

Теорема 9. *Пусть существует такое $p > 2$, что*

а) $\int\limits_G\int\limits_G |K(x, y)|^p\, dx\, dy < \infty$;

б) $|f(x, u)| < a(x) + b|u|^{p-1}$ $\quad \left(a(x) \in L^{\frac{p}{p-1}},\ b > 0\right)$;

$$\text{в) } |f(x,u) - f(x,0) - f'_u(x,0)\,u| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u|^{\alpha_i} \varphi_i(x) + b\,|u|^{p-1}$$

$$\left(1 < \alpha_i < p - 1;\ \varphi_i(x) \in L^{\frac{p}{p-1-\alpha_i}}\right).$$

Тогда вполне непрерывный оператор (1) *имеет в нуле* θ *пространства* L^p *производную Фреше* $D = Af_1$.

Из результатов статьи ([7]) вытекает, что в условиях теорем 8 и 9 при дополнительном условии $f(x, 0) \equiv 0$ каждое собственное число нечетной кратности оператора (8) будет точкой бифуркации оператора (1).

Будем говорить, что N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2-условию, если она эквивалентна $M^2(u)$. Примерами таких N'-функций могут служить N'-функции $e^{u^2} - 1$, $e^{|u|} - |u| - 1$ и т. д. Непосредственно из определения следует, что если N'-функция удовлетворяет Δ^2-условию, то она удовлетворяет и Δ_3-условию.

Простой признак того, что N'-функция удовлетворяет Δ^2-условию, дает следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть найдется такое* $\alpha > 0$, *что функция* $u^{-\alpha} \ln M(u)$ *не убывает при значениях* u, *больших некоторого* $u_0 > 0$. *Тогда N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2-условию.*

Важность класса N'-функций, удовлетворяющих Δ^2-условию, в частности, оправдывается следующей теоремой.

Теорема 11. *Пусть N'-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ^2-условию. Тогда дополнительная к ней N'-функция $N(v)$ удовлетворяет Δ'-условию.*

В ([8]) дано определение оператора H, асимптотически близкого к линейному оператору D. Асимптотически линейные операторы обладают рядом важных свойств. Например ([8]), каждому собственному числу нечетной кратности оператора D соответствует непрерывная ветвь собственных функций оператора H. Из принципа Шаудера (см., например, ([9])) вытекает, что уравнение $\varphi = \lambda H$ имеет в E по крайней мере одно решение, если оператор H асимптотически близок к нулю ($D\varphi \equiv \theta$, $\varphi \in E$).

Отыскание условий асимптотической линейности оператора, действующего в пространстве Орлича, проводится при помощи тех же рассуждений, как и отыскание условий дифференцируемости оператора. Приведем одно частное утверждение.

Теорема 12. *Пусть выполнены условия*

$$\int_G \int_G |K(x,y)|\, R[|K(x,y)|]\, dx\, dy < \infty, \quad |f(x,u)| < a(x) + R(|u|),$$

$$a(x) \in L_N^*,$$

где $R(u)$ — функция, обратная к N'-функции $N(v)$, удовлетворяющей Δ^2-условию. Тогда оператор (1) *асимптотически близок к нулевому оператору в* L_M^*.

В качестве $R(u)$ в теореме 12 могут фигурировать, например, функции, при больших значениях u равные $\ln|u|$, $\sqrt{\ln|u|}$ и т. д.

Поступило
19 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Orlicz, Bull. international de l'Acad. Pol., ser. A, Cracovie (1932). [2] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939. [3] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, ДАН, 81, № 4 (1951); 85, № 1 (1952). [4] М. А. Красносельский, ДАН, 77, № 2 (1951). [5] Я. Б. Рутицкий, Доповіді АН УРСР, № 3 (1952). [6] Ж. Лерей, Ю. Шаудер, Усп. матем. наук, в. 13—14 (1947). [7] М. А. Красносельский, ДАН, 79, № 3 (1951). [8] М. А. Красносельский, ДАН, 74, № 2 (1950). [9] В. В. Немыцкий, Усп. матем. наук, 1 (1936).