Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

А. В. МАЛЫШЕВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 28 XII 1952)

Настоящая заметка служит развитием заметки [1]. Мы покажем, как из формулированной там теоремы 2 можно вывести некоторое усиление теоремы 1.

Теорема. *Пусть $f(x, y, z)$ — положительная тернарная собственно примитивная квадратичная форма инвариантов $[k, 1]$, где k — нечетное число, принадлежащая роду с характерами*

$$\left(\frac{f}{p_i}\right)=\left(\frac{-1}{p_i}\right) \text{ для всех } p_i \setminus k,$$

и пусть g — любое целое положительное нечетное число (в том числе и единица). Тогда, если целые числа m, x_0, y_0, z_0 удовлетворяют условиям:

а) $m > m_0(k, q)$;

б) о. н. д. $(m, kg)=1$;

в) $m \equiv f(x_0, y_0, z_0) \bmod (8kg)$;

г) $\left(\frac{m}{q_i}\right)=\left(\frac{-1}{q_i}\right)$ *для всех* $q_i \setminus g$,

то среди $r(f, m)$ примитивных представлений числа m формой f имеется

$$> c_1 h(-m)$$

таких, которые $\equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod g$. При этом $c_1 = c_1(k, g)$.

Доказательство. Известно, что форма f, удовлетворяющая условиям теоремы, представима суммой трех линейных квадратов:

$$f(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)^2 + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)^2 + \\ + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2,$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = k.$$

Обозначим целые числа

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 = X_0,$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 = Y_0,$$
$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 = Z_0.$$

Тогда из условий в) и г) теоремы мы будем иметь:

$$m \equiv X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 \pmod{kg};$$

$$\left(\frac{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}{p_i}\right) = \left(\frac{f}{p_i}\right) = \left(\frac{-1}{p_i}\right); \quad \left(\frac{X_0^2+Y_0^2+Z_0^2}{q_i}\right) = \left(\frac{m}{q_i}\right) = \left(\frac{-1}{q_i}\right);$$

m примитивно представимо суммой трех квадратов.

Поэтому мы сможем применить теорему 2 заметки ([1]) * и подобрать $> c_1 h(-m)$ систем трех целых чисел (X, Y, Z) таких, что

$$m = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

$$(X, Y, Z) \equiv (X_0, Y_0, Z_0) \pmod{kg}; \quad \text{о. н. д. } (X, Y, Z) = 1.$$

Мы утверждаем, что числа x, y, z, определяемые системой

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = X,$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = Y,$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = Z,$$

будут целыми, сравнимыми с (x_0, y_0, z_0) по модулю g.

Действительно,

$$x = \frac{1}{k}(A_{11}X + A_{21}Y + A_{31}Z),$$

$$y = \frac{1}{k}(A_{12}X + A_{22}Y + A_{32}Z),$$

$$z = \frac{1}{k}(A_{13}X + A_{23}Y + A_{33}Z),$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения матрицы (a_{ij}). Но

$$X = X_0 + kgt_1, \quad Y = Y_0 + kgt_2, \quad Z = Z_0 + kgt_3.$$

Поэтому

$$x = \frac{1}{k}(A_{11}X + A_{21}Y + A_{31}Z) =$$

$$= \frac{1}{k}(A_{11}X_0 + A_{21}Y_0 + A_{31}Z_0) + g(A_{11}t_1 + A_{21}t_2 + A_{31}t_3) =$$

$$= \frac{1}{k}[A_{11}(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0) + A_{21}(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0) +$$

$$+ A_{31}(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0)] + g(A_{11}t_1 + A_{21}t_2 + A_{31}t_3) =$$

$$= x_0 + g(A_{11}t_1 + A_{21}t_2 + A_{31}t_3).$$

Точно так же

$$y = y_0 + g(A_{12}t_1 + A_{22}t_2 + A_{32}t_3);$$

$$z = z_0 + g(A_{13}t_1 + A_{23}t_2 + A_{33}t_3).$$

Таким образом, x, y, z — целые и $(x, y, z) \equiv (x_0, y_0, z_0) \pmod{g}$. О. н. д. $(x, y, z) = 1$, так как о. н. д. $(X, Y, Z) = 1$. Разным (X, Y, Z) соответствуют разные (x, y, z).

Тем самым теорема полностью доказана.

Ленинградское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
22 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Малышев, ДАН, 87, № 2 (1952).

* По недосмотру там пропущено условие $m \equiv x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \pmod{k}$ (в обозначениях заметки ([1])).