

Н. М. КОРОВОВ

**НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ
С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ**

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 I 1953)

В работе (1) мною был указан класс величин a , для которых суммы

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m a q^x} \quad (m \neq 0, \text{ целое}) \quad (1)$$

имеют оценку, близкую к «средней»:

$$|S| < c \sqrt{P} \quad (c = c(m))^*.$$

Вопрос о возможности улучшения этой оценки для какого-либо a оставался открытым.

Ниже выводятся новые оценки сумм вида (1); получающиеся результаты ни для какого a уже не могут быть существенно улучшены.

Лемма 1. Пусть целые $m > 1$ и $q > 1$ взаимно просты, $a \not\equiv 0 \pmod{m}$ и τ кратно показателю, которому принадлежит q по модулю m . Тогда для всякого целого $N \geq -1$ будет

$$\sum_{x=N+1}^{N+m\tau} e^{2\pi i \frac{a q^x}{m(q^\tau - 1)}} = 0. \quad (2)$$

Доказательство. Согласно определению τ для всякого целого $k \geq 0$

$$q^{\tau k} \equiv 1 \pmod{m}.$$

Суммирование по k дает

$$\frac{q^{x\tau} - 1}{q^\tau - 1} \equiv x \pmod{m} \quad (x \geq 0), \quad (3)$$

$$q^{x\tau} \equiv 1 + x(q^\tau - 1) \pmod{m(q^\tau - 1)}.$$

Используем полученное сравнение для вычисления суммы (2):

$$\begin{aligned} \sum_{x=N+1}^{N+m\tau} e^{2\pi i \frac{a q^x}{m(q^\tau - 1)}} &= \sum_{x_1=1}^{\tau} \sum_{x_2=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{a q^{N+x_1} q^{x_2\tau}}{m q^\tau - 1}} = \\ &= \sum_{x_1=1}^{\tau} \sum_{x_2=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{a q^{N+x_1} [1 + x_2(q^\tau - 1)]}{m(q^\tau - 1)}} = \sum_{x_1=1}^{\tau} e^{2\pi i \frac{a q^{N+x_1}}{m(q^\tau - 1)}} \sum_{x_2=0}^{m-1} e^{2\pi i \frac{a q^{N+x_1} x_2}{m}}. \end{aligned}$$

* В (1) рассматривается случай $m = 1$; без каких-либо изменений метода результат распространяется на случай произвольного $m \neq 0$ (с соответствующей заменой c на $c(m)$).

Внутренняя сумма в последнем равенстве обращается в нуль для всех значений x_1 , чем лемма доказана.

Пусть $m_1 > 1$ и $q > 1$ взаимно просты. Определим величины m_ν рекуррентным соотношением

$$m_{\nu+1} = m_\nu (q^{\tau_\nu} - 1) \quad (\nu = 1, 2, \dots),$$

где $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ — произвольные числа, кратные показателям, которым q принадлежит, соответственно, по модулям m_1, m_2, \dots . Пусть, далее, числа n_1, n_2, \dots определены соотношением $n_{\nu+1} = n_\nu + m_\nu \tau_\nu \psi(\nu)$, $n_0 = 0$, где $\psi(\nu) > 0$ — произвольная возрастающая целочисленная функция. Тогда справедлива следующая лемма:

Лемма 2. Для всякого a , заданного рядом

$$\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{m_{\nu+1} q^{n_\nu}}, \quad (4)$$

и всякого P из интервала $n_k \leq P < n_{k+1}$ выполняется оценка

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} = O(m_k \tau_k) \quad (m \neq 0, \text{ целое}). \quad (5)$$

Доказательство. Представим P в виде

$$P = n_k + r m_k \tau_k + r'; \quad 0 \leq r < \psi(k); \quad 0 \leq r_1 < m_k \tau_k.$$

Разобьем сумму (5) на части:

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{x=n_i+1}^{n_{i+1}} e^{2\pi i m \alpha q^x} + \sum_{x=n_k+1}^{n_k+r m_k \tau_k} e^{2\pi i m \alpha q^x} + O(m_k \tau_k). \quad (6)$$

Введем обозначения:

$$r_i = \begin{cases} \psi(i) & \text{для } 1 \leq i \leq k-1, \\ r & \text{для } i = k; \end{cases} \quad S_i = \sum_{x=1}^{r_i m_i \tau_i} e^{2\pi i m \alpha q^{n_i+x}}.$$

Тогда равенство (6) примет вид:

$$S = \sum_{i=1}^k S_i + O(m_k \tau_k). \quad (7)$$

Оценим суммы S_i . Согласно определению, $n_{\nu+1} > n_\nu$ и $m_{\nu+1} = m_\nu (q^{\tau_\nu} - 1) \equiv 0 \pmod{m_\nu}$, следовательно,

$$\alpha = \sum_{\nu=0}^i \frac{1}{m_{\nu+1} q^{n_\nu}} + O\left(\frac{1}{m_{i+2} q^{n_{i+1}}}\right) = \frac{a_i}{m_{i+1} q^{n_i}} + O\left(\frac{1}{m_{i+2} q^{n_{i+1}}}\right).$$

Легко видеть, что $(a_i, m_i) = 1$. Действительно,

$$\frac{a_i}{m_{i+1} q^{n_i}} = \frac{a_{i-1}}{m_i q^{n_{i-1}}} + \frac{1}{m_{i+1} q^{n_i}} = \frac{a_{i-1} (q^{\tau_i} - 1) q^{n_i - n_{i-1}} + 1}{m_{i+1} q^{n_i}};$$

$$a_i = a_{i-1} (q^{\tau_i} - 1) q^{n_i - n_{i-1}} + 1 \equiv 1 \pmod{m_i}.$$

Таким образом,

$$\alpha = \frac{a_i}{m_i (q^{\tau_i} - 1) q^{n_i}} + O\left(\frac{1}{m_{i+2} q^{n_{i+1}}}\right),$$

$$m \alpha q^{n_i + x} = \frac{m a_i q^x}{m_i (q^{\tau_i} - 1)} + O\left(\frac{q^x}{m_{i+2} q^{r_i m_i \tau_i}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$S_i = \sum_{x=1}^{r_i m_i \tau_i} e^{2\pi i x} \frac{m a_i q^x}{m_i (q^{\tau_i} - 1)} + O\left(\frac{1}{m_{i+2}}\right).$$

Начиная с некоторого i , будет $m_i > m$. Так как $(a_i, m_i) = 1$, то $a_i m \not\equiv 0 \pmod{m_i}$, и, в силу леммы 1, получим для $i > i_0(m)$:

$$\sum_{x=1}^{r_i m_i \tau_i} e^{2\pi i x} \frac{m a_i q^x}{m_i (q^{\tau_i} - 1)} = 0; \quad S_i = O\left(\frac{1}{m_{i+2}}\right).$$

Подставляя эту оценку в (7), приходим к утверждению леммы:

$$S = O(m_k \tau_k).$$

Пусть при $P \rightarrow \infty$ монотонная функция $\varphi(P)$ неограниченно возрастает. Определим α как в лемме 2 и потребуем, чтобы рост величин n_ν удовлетворял условию

$$n_\nu > \varphi_1(\nu m_\nu \tau_\nu), \quad (8)$$

где φ_1 — функция, обратная функции φ . (Условие (8) заведомо выполняется, если в равенстве $n_{\nu+1} = n_\nu + \psi(\nu) m_\nu \tau_\nu$, определяющем величины n_ν , выбрать в качестве $\psi(\nu)$ произвольную функцию, удовлетворяющую неравенству $\psi(\nu) > \varphi_1[(\nu+1) m_{\nu+1} \tau_{\nu+1}]$.)

Теорема. Какова бы ни была функция $\varphi(P)$, как угодно медленно стремящаяся к бесконечности, при достаточно быстром росте величин n_ν (определяемом неравенством (8)) для всякого α , заданного рядом $\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{m_{\nu+1} q^{n_\nu}}$, будет справедлива оценка

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} = o(\varphi(P)) \quad (m \neq 0, \text{ целое}).$$

Ни для какого α эту оценку нельзя улучшить до $O(1)$.

Доказательство. Выберем k из условия $n_k \leq P < n_{k+1}$. Применяя лемму 2, получим:

$$\sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} = O(m_k \tau_k).$$

В силу условия (8) $m_k \tau_k < \frac{1}{k} \varphi(n_k) = o(\varphi(P))$, чем доказано первое утверждение теоремы. Допустим, что второе утверждение теоремы неверно. Тогда найдется α такое, что для всех $P > P_0$ при некотором $M(m)$ будет

$$\left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \right| < M(m). \quad (9)$$

Из неравенства (9) следует, что функция αq^x равномерно распределена. Но тогда для всякого целого $n > 0$ в q -ичном разложении $\alpha = 0, \delta_1 \delta_2 \dots$ найдется $2n$ рядом стоящих знаков, равных нулю. Пусть эти знаки будут $\delta_{N+1}, \dots, \delta_{N+2n}$. Очевидно, $N = N(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Выберем $n > 2M(1)$ и притом настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $N > P_0$ и $q^n > 2\pi(n+1)$. Тогда в силу (9)

$$\left| \sum_{x=N}^{N+n} e^{2\pi i \alpha q^x} \right| \leq \left| \sum_{x=1}^{N+n} e^{2\pi i \alpha q^x} \right| + \left| \sum_{x=1}^{N-1} e^{2\pi i \alpha q^x} \right| < 2M(1).$$

С другой стороны, так как $\delta_{N+x} = 0$ ($x = 1, 2, \dots, 2n$), получим

$$\left| \sum_{x=N}^{N+n} e^{2\pi i \alpha q^x} \right| = \left| \sum_{x=1}^{n+1} e^{2\pi i 0, \delta_{N+x} \delta_{N+x+1} \dots} \right| \geq n+1 - 2\pi \frac{n+1}{q^n} \geq n.$$

Отсюда следует неравенство $n < 2M(1)$, противоречащее выбору n , чем теорема доказана полностью.

Замечание. Из леммы 2, между прочим, следует, что всякое α , заданное рядом (4), при условии $m_{\nu} \tau_{\nu} = 0$ (n_{ν}) является нормальным числом в смысле Бореля.

Действительно, указанное условие обеспечивает равномерность распределения функций αq^x , что, очевидно, эквивалентно нормальности числа α (эта эквивалентность следует, например, из леммы, помещенной во 2-й главе моей работы (2)).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
5 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. М. Коробов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38, 87 (1951).
² Н. М. Коробов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 3, 215 (1950).