Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 4

МАТЕМАТИКА

Е. Е. ВИКТОРОВСКИЙ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ПОНЯТИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ РАЗРЫВНОГО ПОЛЯ НАПРАВЛЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 2 I 1953)

Пусть $f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv f_i(x, y)$ $(i = 1, \ldots, n)$ удовлетворяют следующим условиям:

а) f_i измеримы в некоторой $(n+1)$-мерной области G;

б) $M(x) = \max\limits_i \operatorname{vrai}\max\limits_y |f_i(x, y)|$ суммируема.

Определение. Обобщенным решением системы

$$y_i'(x) = f_i(x, y) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

с начальной точкой $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \equiv (x_0, y_0) \in G$ называем систему n абсолютно-непрерывных функций $u_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, определенных на некотором сегменте $X \equiv [x_0, x_0 + \alpha]$, $u_i(x_0) = y_{i0}$, и удовлетворяющих условию: для любых заданных $\varepsilon > 0$ и множества N $(n+1)$-мерной меры 0 существует n^2 функций $\psi_{ij}(x)$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, измеримых на X и таких, что:

1) $f_i(x, \psi_{1i}(x), \ldots, \psi_{ni}(x))$ суммируемы на X;

2) $|u_i(x) - \psi_{ij}(x)| < \varepsilon$ на X $(i, j = 1, \ldots, n)$;

3) $\left| u_i(x) - y_{i0} - \int\limits_{x_0}^{x} f_i(x, \psi_{1i}(x), \ldots, \psi_{ni}(x))\, dx \right| < \varepsilon$ на X;

4) $(x, \psi_{1i}(x), \ldots, \psi_{ni}(x)) \bar{\in} N$ почти для всех $x \in X$.

1°. Теорема 1 (существования). *Если f_i удовлетворяют условиям* а) *и* б) *и замкнутая область*

$$P \begin{cases} x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \alpha, \\ y_{i0} - \int\limits_{x_0}^{x} [M(x) + \gamma]\, dx \leqslant y_i \leqslant y_{i0} + \int\limits_{x_0}^{x} [M(x) + \gamma]\, dx \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

для некоторого $\gamma > 0$ целиком лежит в G, то существует по крайней мере одно обобщенное решение системы (1) *с начальной точкой (x_0, y_0), определенное на $X \equiv [x_0, x_0 + \alpha]$.*

При этом можно показать, что функции ψ_{ij}, упоминаемые в определении, могут быть выбраны непрерывными.

Для построения обобщенных решений можно указать единообразный процесс, который и доставляет доказательство теоремы 1.

Пусть $p_i(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv p_i(x, y)$ $(i = 1, \ldots, n)$ измеримы и положительны на G и суммируемы по $y \equiv (y_1, \ldots, y_n)$ для каждого $x \in X$.

Возьмем какую-нибудь последовательность $\{R^m\}$ разбиений сегмента X на ν_m полусегментов $I_\nu^m = (x_{\nu-1}^m, x_\nu]$

$$x_0 = x_0^m < x_1^m < \ldots < x_{\nu_m}^m = x_0 + \alpha \quad (m = 1, 2, \ldots ; \nu = 1, 2, \ldots, \nu_m),$$

$$\lim_{m \to \infty} \max_\nu \{\operatorname{mes} I_\nu^m\} = 0;$$

пусть $\underline{l}_i^{m\nu}$ и $\overline{l}_i^{m\nu}$ $(i = 1, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots ; \nu = 1, \ldots, \nu_m)$ обозначают произвольные неотрицательные числа, такие, что

$$\lim_{m \to \infty} \max_{i, \nu} \{\underline{l}_i^{m\nu}, \overline{l}_i^{m\nu}\} = 0.$$

Для каждого R^m построим суммируемые на X функции $\rho_i^m(x)$ следующим образом:

$$\rho_i^m(x_0) = 0, \quad \rho_i^m(x) = \frac{\int\limits_{\mathcal{E}^m(x)} f_i(x, y)\, p_i(x, y)\, dy}{\int\limits_{\mathcal{E}^m(x)} p_i(x, y)\, dy} \text{ при } x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha, \tag{2}$$

где $\mathcal{E}^m(x) = \underset{y}{E}\left[(x, y) \in P;\ -\underline{l}_i^{m\nu} - \int\limits_{x_{\nu-1}^m}^{x} M(x)\, dx \leqslant y_i - y_{i0} - \int\limits_{x_0}^{x_{\nu-1}^m} \rho_i^m(x) dx \leqslant \right.$

$\left. \leqslant \overline{l}_i^{m\nu} + \int\limits_{x_{\nu-1}^m}^{x} M(x)\, dx\right]$ при $x \in I_\nu^m$.

Последовательность систем равномерно ограниченных и разностепенно непрерывных функций $\left\{y_{i0} + \int\limits_{x_0}^{x} \rho_i^m(x)\, dx\right\}$ имеет хотя бы одну предельную (в смысле равномерной сходимости) систему функций; любая из этих предельных систем является обобщенным решением системы (1) с начальным условием (x_0, y_0).

С другой стороны, оказывается, что любое обобщенное решение может быть получено этим процессом (при надлежащем выборе функций p_i, последовательности разбиений $\{R^m\}$ и чисел $l_i^{m\nu}$).

2°. Теорема 2. *Если $K_i \subseteq X$ таково, что $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ непрерывна по $(y_1, \ldots, y_n)$ при $x \in K_i$ и $y_j = u_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ (см. определение), то почти везде на K_i*

$$u_i'(x) = f_i(x, u(x)).$$

Таким образом, для уравнений, удовлетворяющих условиям Каратеодори ([6]), обобщенные решения совпадают с решениями в интегральном смысле.

3°. В частном случае одного уравнения $y'(x) = f(x, y(x))$ мы в любой ε-окрестности нулевого порядка обобщенного решения $u(x)$ будем иметь непрерывные «ε-решения» соответствующего интегрального уравнения, именно — функции $\psi(x)$ здесь удовлетворяют неравенству

$$\left|\psi(x) - y_0 - \int\limits_{x_0}^{x} f(x, \psi(x))\, dx\right| < \varepsilon,$$

причем для любого наперед заданного множества N плоской меры 0 может быть обеспечено выполнение требования $(x, \psi(x)) \overline{\in} N$ почти для всех x.

В общем случае системы (1), при $n > 1$, ε-решений, вообще говоря, не существует (в окрестности произвольного обобщенного решения), как показывают простейшие примеры, например

$$y_1' = \begin{cases} 1 \text{ при } y_1 \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } y_1 < 0; \end{cases} \qquad y_2' = \begin{cases} 0 \text{ при } y_1 \geqslant 0, \\ 1 \text{ при } y_1 < 0, \end{cases}$$

в окрестности обобщенного решения $y_1 \equiv y_2 \equiv 0$.

Если процесс, указанный в п. 1, применить в случае одного уравнения при $\underline{l}^{m\nu} = \overline{l}^{m\nu} = 0$, причем функции ρ^m определять вместо равенства (2) равенством

$$\rho^m(x) = \operatorname*{vrai\,max}_{y \in \mathscr{E}^m(x)} f(x, y),$$

то, какова бы ни была последовательность $\{R^m\}$, $\lim\limits_{m \to \infty} \max\limits_{\nu} \{\operatorname{mes} I_\nu^m\} = 0$, имеем:

$$\lim_{m \to \infty} \left\{ y_0 + \int_{x_0}^{x} \rho^m(x)\, dx \right\} = \overline{u}(x),$$

где $\overline{u}(x)$ — максимальное обобщенное решение (минимальное получаем заменой vrai max на vrai min). Таким образом, в случае условий Каратеодори ([6]) мы получаем здесь конструктивный метод построения максимального (минимального) решения путем приближений сверху (снизу). Другие процессы такого рода мне неизвестны (ср. ([8], [5])).

4°. Сохраняя для p_i условия п. 1° и обозначая символом $\Delta(Y; h)$ область $Y_i - h < y_i < Y_i + h$ $(i = 1, \ldots, n)$, положим

$$\overline{F}_i(x, y; p_i) = \overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\int\limits_{\Delta(y;\, h)} f_i(x, y)\, p_i(x, y)\, dy}{\int\limits_{\Delta(y;\, h)} p_i(x, y)\, dy}, \quad \underline{F}_i = \underline{\lim_{h \to 0}} \frac{\int\limits_{\Delta(y;\, h)} f_i\, p_i\, dy}{\int\limits_{\Delta(y;\, h)} p_i\, dy}.$$

Теорема 3. *Чтобы система $\{u_i(x)\}$ была обобщенным решением системы* (1), *необходимым и достаточным условием является существование системы $\{p_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ такой, что почти всюду на X*

$$u_i'(x) = \overline{F}_i(x, u(x); p_i) = \underline{F}_i(x, u, (x); p_i).$$

5°. Топологические свойства множества интегральных кривых, выходящих из фиксированной точки (интегральная воронка), сохраняются для соответствующего множества обобщенных интегральных кривых (обобщенная интегральная воронка). Главнейшее из этих свойств — обобщенная теорема Кнезера[7].

Теорема 4. *В пересечении с произвольной гиперплоскостью $x = x'$ обобщенная интегральная воронка дает континуум.*

Обобщаются также: теорема Фукухара ([10]); лемма Камке ([9]) (цит. по ([2])); дескриптивные свойства, найденные Е. А. Барбашиным ([2]). Если правые части уравнений не зависят от x, то совокупность обобщенных интегральных кривых определяет динамическую систему без предположения единственности ([3]).

6°. Указанный выше метод построения экстремальных обобщенных решений (в случае $n = 1$) может быть изменен таким образом, что формулировка его будет сходна с определением интеграла Юнга.

Известные мне доказательства теоремы существования, построенные по аналогии с определением интеграла (Римана), или применимы при значительно более сильных ограничениях ([8]), или дают в качестве «интегралов» функции, значительно отличающиеся по своим свойствам от решений, даже в случае условий Каратеодори (ср. ([4])).

Условимся обозначать как разбиение L сегмента X всякую конечную систему измеримых множеств E_k $(k=1,\ldots,\nu)$ таких, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\nu} E_k = X$, $E_k \cap E_l = \Lambda$ (при $k \neq l$). Пусть $a_{i-1} = \inf\limits_{x \in E_i} x$ и $a_i \leqslant a_j$ при $i < j$.

Определим для каждого разбиения L функцию $L(x)$ следующим образом:

$$L(x) = \begin{cases} \operatorname{vrai\,max}\limits_{\mathscr{E}_i} f(x, y) & \text{при } x \in E_i \text{ и } \operatorname{vrai\,max}\limits_{\mathscr{E}_i} f(x, y) < +\infty; \\ M(x) & \text{при } x \in E_i \text{ и } \operatorname{vrai\,max}\limits_{\mathscr{E}_i} f(x, y) = +\infty, \end{cases}$$

где $\mathscr{E}_i = \underset{(x, y)}{E}\left[x \in E_i; \left|y - y_0 - \int\limits_{x_0}^{a_{i-1}} L(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{a_{i-1}}^{x} M(x)\,dx\right]$.

Оказывается, что

$$\overline{u}(x) = \inf_L \left\{ y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} L(x)\,dx \right\}.$$

Это построение максимальной обобщенной интегральной кривой легко может быть сформулировано и без применения понятия интеграла (т. е. в терминах теории меры).

7°. Указанный в п. 2 метод применим также для получения решений некоторых других функциональных уравнений типа Вольтерра, как например:

$$y(x) = \varphi(x) + \int\limits_{x_0}^{x} K(t, x)\, f(t, y(t))\,dt, \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ непрерывна, $K(t, x)$ и $f(t, y)$ измеримы по t и непрерывны по второму аргументу $(x_0 \leqslant x,\ t \leqslant x_0 + \alpha; -\infty < y < +\infty)$; непрерывность K предположим равномерной относительно t; $|K(t, x)| \leqslant M(t)$, $|f(t, y)| \leqslant M(t)$, где $M(t)$ суммируема с квадратом на X*. Если не предполагать $f(t, y)$ непрерывной по y, то вместо точных решений мы получим обобщенные, для которых, аналогично случаю уравнения $y' = f(x, y)$, в любой ε-окрестности существуют ε-решения.

Поступило
2 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Тихонов, Бюлл. МГУ, (А), 1, в. 8 (1938). [2] Е. А. Барбашин, ДАН, 41, № 5 (1943). [3] М. И. Минкевич, ДАН, 60, № 3 (1948). [4] Х. Керес, Уч. зап. Тартусского гос. ун-та, № 6 (1950). [5] Е. Е. Викторовский, Матем. сборн., 31, в. 1 (1952). [6] C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 1918. [7] H. Kneser, Sitzungsber. Preuß. Akad., 1923, 171. [8] M. Müller, Jahresber. DMV, 37, 33 (1928). [9] E. Kamke, Acta Math., 58, 57 (1928). [10] M. Fukuhara, Proc. Acad. Tokyo, 6, 360 (1930).

* Замечу, что существование точных решений уравнения (3) (на достаточно малом сегменте X) следует из общих теорем А. Н. Тихонова ([1]).