**Доклады Академии Наук СССР**
**1953. Том LXXXIX, № 4**

*МАТЕМАТИКА*

Н. В. АЗБЕЛЕВ

# О ГРАНИЦАХ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРЕМЫ С. А. ЧАПЛЫГИНА

*(Представлено академиком С. Л. Соболевым 6 II 1953)*

Развитию метода С. А. Чаплыгина [1] приближенного интегрирования дифференциальных уравнений препятствует отсутствие оценки границ применимости теоремы о дифференциальных неравенствах. На основе предлагаемого обобщения этой теоремы оценка упомянутых границ не представляет затруднений. Эта оценка, например, может быть сведена к решению линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Ниже мы будем рассматривать только такие уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

которые имеют на некотором отрезке $[x_0, X]$ $n$ раз непрерывно дифференцируемое решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{2}$$

причем $a_k < y_0^{(k)} < b_k$, где $a_k$ и $b_k$ — постоянные числа. Кроме того в области

$$x_0 < x < X, \quad a_k < y^{(k)} < b_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (G)$$

пространства $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ функция $f = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ должна удовлетворять условию: если при данном $x$ $(x_0 < x < X)$ значения $y_1^{(k)}$ и $y_2^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ составляют две системы значений, принадлежащих области $G$, то при $y_1^{(k)} \geqslant y_2^{(k)}$ выполняется неравенство

$$f(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}) + K \sum_{k=0}^{n-1} (y_1^{(k)} - y_2^{(k)}) \geqslant 0,$$

где $K$ есть некоторое постоянное число.

Условимся называть $n$ раз непрерывно дифференцируемую на $[x_0, X]$ функцию $z = z(x)$ **функцией сравнения относительно области $G$ для решения уравнения** (1) **с начальными условиями** (2), если $z(x)$ не равно тождественно этому решению и на отрезке $[x_0, X]$ выполняются неравенства

$$z^{(n)} \geqslant f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) \quad (z^{(n)} \leqslant f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}));$$

$$a_k < z^{(k)} < b_k; \quad z^{(k)}(x_0) - y^{(k)}(x_0) = \alpha_k \geqslant 0 \quad (\alpha_k \leqslant 0), \ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Числа $\alpha_k$ будем называть **начальными разностями функции сравнения**.

Отметим, что для решения уравнения (1) с непрерывной в достаточно широкой области $G$ правой частью существуют функции сравнения относительно этой области, удовлетворяющие любым начальным разностям.

Теорема. *Пусть $z = z(x)$ есть функция сравнения относительно области $G$ для решения $y = y(x)$ уравнения* (1) *с начальными условиями* (2). *Тогда существует такой промежуток* $(x_0, x_1)$, *в котором*

$$z^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) > 0 \quad (z^{(k)}(x) - y^{(k)}(x) < 0), \quad (k = 0, 1, \ldots, m).$$

*Здесь $m$ есть любое из чисел $0, 1, \ldots, n$, при котором выполняется строгое неравенство*

$$z^{(m)}(x_0) - y^{(m)}(x_0) > 0 \quad (z^{(m)}(x_0) - y^{(m)}(x_0) < 0),$$

*и $m = n$, если*

$$z^{(k)}(x_0) - y^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Эта теорема является обобщением теоремы С. А. Чаплыгина ([1, 2]) о дифференциальных неравенствах.

Рассмотрим теперь для решения $y = y(x)$ уравнения (1) функции сравнения $z = z(x)$ относительно данной области $G$, удовлетворяющие данным начальным разностям $\alpha_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Пусть $\{\xi_k\}$ есть множество нулей всех производных $\eta^{(k)}(x) = z^{(k)}(x) - y^{(k)}(x)$ данного порядка $k$ в промежутке $[x_0, X]$. Пусть, далее, $X_k = \inf\{\xi_k\}$, если это множество не пустое, и $X_k = X$, если это множество пустое. Промежуток $[x_0, X_k]$ будем называть промежутком применимости $k$-го порядка теоремы С. А. Чаплыгина для данного решения уравнения (1) относительно области $G$ и данных начальных разностей $\alpha_k$.

Отметим, что для данного решения уравнения (1) промежуток применимости $k$-го порядка относительно области $G$ и начальных разностей $\alpha_k$ содержится в промежутке применимости $k-1$-го порядка относительно той же области $G$ и тех же начальных разностей $\alpha_k$.

Легко убедиться, что для линейного уравнения величины промежутков применимости зависят лишь от числа $X$, связанного с границей области $G$. Поэтому для линейных уравнений мы будем говорить о промежутках применимости относительно промежутка $(x_0, X)$.

Рассмотрим линейное уравнение

$$L_n[v] = v^{(n)} - q_{n-1}(x)\, v^{(n-1)} - \ldots - q_0(x)\, v = 0$$

с непрерывными на $[x_0, X]$ коэффициентами $q_k = q_k(x)$ и начальными условиями

$$v^{(k)}(x_0) = v_0^{(k)} \geqslant 0 \quad (v_0^{(k)} \leqslant 0), \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Обозначим через $\xi_p$ наименьший в промежутке $(x_0, X)$ нуль производной $v^{(p)} = v^{(p)}(x)$; если же в $(x_0, X)$ нет нулей этой производной, то положим, что $\xi_p = X$.

Можно показать, что при непрерывной функции $\varphi = \varphi(x)$ для любого решения уравнения

$$L_n[y] = \varphi(x) \tag{3}$$

промежуток применимости $p$-го порядка относительно $(x_0, X)$ и начальных разностей $\alpha_k$ совпадает с промежутком $(x_0, \xi_p)$, если $\alpha_k = v_0^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Можно показать, далее, что для любого решения уравнения (3) промежуток применимости $p$-го порядка относительно $(x_0, X)$ и нулевых начальных разностей $\alpha_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ содержит промежуток применимости $p$-го порядка для любого решения уравнения (3) относительно $(x_0, X)$ и любых начальных разностей.

Основанием для оценки длин промежутков применимости в более общем случае служит следующая

Теорема сравнения. *Пусть дано уравнение*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(p)}), \quad p \leqslant n-1, \tag{4}$$

*с начальными условиями* (2). *Правая часть этого уравнения непрерывна в замкнутой области* $\overline{G}$ *и имеет непрерывные в* $G$ *частные производные* $\partial f / \partial y^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, p)$. *Пусть, далее, некоторые функции* $q_k = q_k(x)$ *непрерывны на* $[x_0, X]$ *и в области* $G$ *выполняются неравенства*

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \geqslant q_k(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, p).$$

*Тогда промежуток применимости p-го порядка для любого решения уравнения*

$$v^{(n)} = \sum_{k=0}^{p} q_k(x)\, v^{(k)} \tag{5}$$

*относительно* $(x_0, X)$ *и начальных разностей* $\alpha_k$ *содержится в промежутке применимости p-го порядка для решения уравнения* (4), *удовлетворяющего начальным условиям* (2), *относительно области* $G$ *и тех же значений начальных разностей* $\alpha_k$.

Оценка длин промежутков применимости очень упрощается, если нижние границы производных $\partial f / \partial y^{(k)}$ в области $G$ принять за коэффициенты уравнения (5). Пусть, например, для уравнения

$$y'' = f(x, y) \tag{6}$$

в некоторой области $G$ $\partial f / \partial y > A$, где $A$ — постоянное число. Решение уравнения (5), имеющего здесь вид $y'' = Ay$, с начальными условиями $y(x_0) = \alpha_0 = 0$, $y'(x_0) = \alpha_1 > 0$ не обращается в нуль внутри промежутка $(x_0, x_0 + \pi / \sqrt{|A|})$. Согласно теореме сравнения этот промежуток содержится в промежутке применимости 0-го порядка для решения уравнения (6) относительно области $G$ и начальных разностей $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$.

Московский станкоинструментальный институт
им. И. В. Сталина

Поступило
3 II 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, 1950. [2] И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 1952, гл. 5.