Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

И. М. МАКСИМОВ

О СУММОВОМ УРАВНЕНИИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 XI 1952)

Определение 1. Функциональное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{s=1}^{\infty} K(x, s)\,\varphi(s) + f(x), \tag{1}$$

где λ — параметр; $K(x, s)$ и $f(x)$ — заданные функции; $\varphi(x)$ — искомая функция, называется мною суммовым уравнением второго рода. Функция $K(x, s)$ называется ядром. Важность понятия о суммовом уравнении видна из следующей теоремы.

Теорема 1. *Всякая бесконечная система линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных после некоторого преобразования, не изменяющего множества ее решений, может быть записана в виде суммового уравнения*

$$\varphi(x) = \sum_{s=1}^{\infty} K(x, s)\,\varphi(s). \tag{2}$$

Значение этой теоремы следующее: во-первых, она превращает теорию бесконечной системы линейных алгебраических уравнений в теорию суммовых уравнений; во-вторых, она подсказывает нам самый метод решения суммового уравнения, следовательно, и бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

В самом деле, уравнение (1) находится в явной и полной аналогии с интегральным уравнением второго рода

$$\varphi(x) = \lambda \int_{0}^{\infty} K(x, s)\,\varphi(s) + f(x). \tag{3}$$

Эта аналогия внушила мне идею применить к решению уравнения (1) метод, аналогичный методу Фредгольма в теории интегральных уравнений. Подобно тому как метод Фредгольма применим не ко всякому интегральному уравнению, так и мой метод применим не ко всякому суммовому уравнению, а только к такому суммовому уравнению (1), которое удовлетворяет следующему условию Σ_δ: для каждой системы функций $K(x, s)$, $f(x)$ и $\varphi(x)$ существует система положительных чисел K, f и φ таких, что

$$\sum_{x=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} |K(x, s)|^{\delta} \leqslant K, \qquad \sum_{x=1}^{\infty} |f(x)|^{\delta} \leqslant f, \qquad \sum_{x=1}^{\infty} |\varphi(x)|^{\delta} \leqslant \varphi \quad (\delta = 1, 2) \tag{4}$$

Уравнение (1) при выполнении этого условия называется мною регулярным.

Чтобы построить метод решения такого уравнения, введем следующие обозначения:

$$\sum_{\alpha} = \sum_{\alpha_1=1}^{\infty} \sum_{\alpha_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_m=1}^{\infty}; \tag{5}$$

$$K\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \\ \beta_1\beta_2 \ldots \beta_m\end{pmatrix} = |K(\alpha_i, \beta_j)| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m); \tag{6}$$

$$D(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!} \lambda^m \sum_{\alpha} K\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m \\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m\end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$D(x, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!} \lambda^m \sum_{\alpha} K\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m x \\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m s\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Лемма 1. *Ряды* (7) и (8) *сходятся абсолютно и равномерно относительно* x *и* s *при всяком значении параметра* λ.

Обозначим через Σ_δ $(\delta = 1, 2)$ класс всех функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающих следующими свойствами:

во-первых, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть вещественное число, определенное для всякой системы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ натуральных чисел x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

во-вторых, каждой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ соответствует положительное число f такое, что

$$\sum_{x} |f(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^{\delta} \leqslant f \quad (\delta = 1, 2).$$

Первая фундаментальная теорема. *Если* λ *не есть корень уравнения* $D(\lambda) = 0$, *то регулярное уравнение* (1) *имеет единственное решение, и это решение определяется формулой*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{s=1}^{\infty} R(x, s; \lambda) f(s). \tag{9}$$

Теперь рассмотрим тот случай, когда λ есть корень уравнения $D(\lambda) = 0$ и называется фундаментальным числом ядра $K(x, s)$.

Для изучения этого случая вводим следующие обозначения. Пусть $p, q, n, x_1, x_2, \ldots, x_p, s_1, s_2, \ldots, s_p, t_1, t_2, \ldots, t_n$ суть какие-нибудь натуральные числа. Пусть

$$B_n\begin{pmatrix}x_1x_2 \ldots x_p \\ s_1s_2 \ldots s_p\end{pmatrix} = \sum_{t} K\begin{pmatrix}x_1x_2 \ldots x_p t_1 t_2 \ldots t_n \\ s_1s_2 \ldots s_p t_1 t_2 \ldots t_n\end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$D\begin{pmatrix}x_1x_2 \ldots x_p \\ s_1s_2 \ldots s_p\end{pmatrix}; \lambda\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \lambda^{n+p-1} B_n\begin{pmatrix}x_1x_2 \ldots x_n \\ s_1s_2 \ldots s_n\end{pmatrix}; \tag{11}$$

назовем последнее выражение минором порядка p.

Лемма 2. *Если* λ *есть корень уравнения* $D(\lambda) = 0$, *имеющий кратность* ρ, *то минор порядка* ρ *не равен тождественно нулю, следовательно, существует натуральное число* q, $q \leqslant \rho$, *такое, что минор порядка* q *не равен тождественно нулю.*

Наименьшее из чисел q обозначаем через r и называем рангом фундаментального числа λ. Из этого определения следует, что, во-первых, минор порядка r не равен тождественно нулю; во-вторых, поэтому существует система натуральных чисел

$$\begin{Bmatrix}x_1'x_2' \ldots x_r' \\ s_1's_2' \ldots s_r'\end{Bmatrix} \tag{12}$$

таких, что

$$D\begin{pmatrix} x_1'x_2'\ldots x_r' \\ s_1's_2'\ldots s_r' \end{pmatrix}; \lambda \Bigg) \neq 0. \tag{13}$$

Неравенство (13) позволяет нам рассматривать функцию $\varphi_\alpha(x, \lambda)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$ определенную формулой

$$\varphi_\alpha(x, \lambda) = \frac{D\left(\begin{matrix} x_1'\ldots x_{\alpha-1}'x\,x_{\alpha+1}'\ldots x_r' \\ s_1'\ldots s_{\alpha-1}'s_\alpha's_{\alpha+1}'\ldots s_r' \end{matrix}; \lambda\right)}{D\left(\begin{matrix} x_1'x_2'\ldots x_r' \\ s_1's_2'\ldots s_r' \end{matrix}; \lambda\right)} \tag{14}$$

и называемую фундаментальной функцией, соответствующей фундаментальному числу λ.

Вторая фундаментальная теорема. *Если λ есть фундаментальное число ранга r, то регулярное суммовое уравнение*

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{s=1}^{\infty} K(x, s)\,\varphi(s) \tag{15}$$

имеет в классе Σ_8 r линейно независимых решений

$$\varphi(x) = \varphi_\alpha(x, \lambda) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{16}$$

и всякое другое решение $\varphi(x)$ уравнения (15) *может быть определено формулой*

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x, \lambda) + c_2\varphi_2(x, \lambda) + \ldots + c_r\varphi_r(x, \lambda), \tag{17}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_r$ суть произвольные постоянные числа.

Суммовое уравнение

$$\psi(x) = \lambda \sum_{s=1}^{\infty} K(s, x)\,\psi(s) \tag{18}$$

называется присоединенным к уравнению (15).

Лемма 2. *Присоединенное уравнение* (18) *имеет также r фундаментальных функций $\psi_\alpha(x, \lambda)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$, соответствующих фундаментальному числу λ ранга r и линейно не зависящих.*

Третья фундаментальная теорема. 1) *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы регулярное суммовое уравнение* (1) *имело решение в классе Σ_8, заключается в выполнении равенств*

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x)\,\psi_\alpha(x, \lambda) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r). \tag{19}$$

2) *При выполнении этого условия каждое решение в классе Σ_8 регулярного суммового уравнения* (1) *определяется формулой*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{s=1}^{\infty} H(x, s; \lambda) f(s) + c_1\varphi_1(x, \lambda) + c_2\varphi_2(x, \lambda) + \cdots + c_r\varphi_r(x, \lambda), \tag{20}$$

где

$$H(x, s; \lambda) = \frac{D\left(\begin{matrix} x\,x_1'x_2'\ldots x_r' \\ s\,s_1's_2'\ldots x_r' \end{matrix}; \lambda\right)}{D\left(\begin{matrix} x_1'x_2'\ldots x_r' \\ s_1's_2'\ldots s_r' \end{matrix}; \lambda\right)}. \tag{21}$$

Поступило
24 X 1952