

Н. М. КОРОБОВ

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 I 1953)

Иррациональные числа α , разложения которых в непрерывную дробь имеют ограниченные неполные частные, обладают, как известно (см., например, (1)), следующим свойством: для них и только для них существует константа $c = c(\alpha)$ такая, что неравенства

$$0 < x < ct, \quad |ax - y - \beta| < \frac{1}{t} \quad (1)$$

разрешимы в целых числах x и y при произвольном β и любом $t \geq 1$.

Покажем, что в случае неравенств

$$0 \leq x < ct, \quad |aq^x - y - \beta| < \frac{1}{t}, \quad (2)$$

где $q \geq 2$ — целое, существуют числа α , аналогичные числам с ограниченными неполными частными.

Пусть α задано в q -ичной системе счисления:

$$\alpha^* = [a] + 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{x+1} \dots \delta_{x+n} \dots \quad (3)$$

Обозначим через $\lambda = \lambda(n)$ наименьший индекс, при котором среди первых λ n -значных чисел $\delta_{x+1} \dots \delta_{x+n}$ ($x = 0, 1, \dots, \lambda - 1$), выбранных из разложения (3), встретится каждое из q^n существующих в q -ичной системе счисления n -значных чисел (предполагаем, что дробные доли функции aq^x распределены всюду плотно).

Число α назовем числом с ограниченным отношением, если найдется константа $c_1 = c_1(\alpha)$ такая, что для всех $n \geq 1$ будет $\lambda(n)/q^n < c_1$.

Таким образом, числа с ограниченным отношением обладают тем свойством, что среди первых $\lambda(n) = O(q^n)$ n -значных комбинаций, образованных соседними знаками их q -ичного разложения, встретится любая наперед заданная комбинация знаков.

Легко показать, что числа с ограниченным отношением существуют.

Будем обозначать через $\rho_n(q)$ нормальные периодические системы, т. е. системы из $q^n + n - 1$ знаков $\delta_1 \dots \delta_{n-1} \delta_n \dots \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1}$ ($\tau = q^n$), обладающие тем свойством, что совокупность из τ n -значных чисел

$$\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n, \delta_2 \delta_3 \dots \delta_{n+1}, \dots, \delta_\tau \delta_1 \dots \delta_{n-1}$$

совпадает с совокупностью всех q^n существующих в q -ичной системе счисления n -значных чисел (см. (2), теорема 5 или (3), глава I). Систему, состоящую из первых q^n знаков нормальной периодической системы $\rho_n(q)$, будем обозначать через $\rho'_n(q)$.

Теорема 1. Пусть $\psi(k)$ — произвольная ограниченная положительная целочисленная функция и $\rho_1(q), \rho_2(q), \dots$ — любые нормальные периодические системы. Всякое число α вида

$$\alpha = 0, \underbrace{\rho_1'(q) \dots \rho_1'(q)}_{\psi(1)} \dots \underbrace{\rho_k'(q) \dots \rho_k'(q)}_{\psi(k)} \dots \quad (4)$$

является числом с ограниченным отношением*.

Доказательство. Обозначим через M константу, ограничивающую функцию $\psi(k)$. В силу определения систем $\rho_n(q)$ функция $\lambda(n)$ не превосходит числа знаков, предшествующих первой из систем $\rho_{n+1}(q)$ в разложении (4), поэтому

$$\lambda(n) \leq \sum_{k=1}^n \psi(k) q^k < Mq^{n+1};$$

$$\frac{\lambda(n)}{q^n} < C_1 \quad (C_1 = Mq)$$

и, следовательно, α — число с ограниченным отношением.

Из следующей теоремы видно, что числа с ограниченным отношением в неравенствах (2) играют ту же роль что и числа с ограниченным неполными частными в неравенствах (1).

Теорема 2. Для того чтобы существовало число $C > 0$, для которого при любых β и $t \geq 1$ найдется пара целых чисел x и y , удовлетворяющих неравенствам

$$0 \leq x < Ct, \quad |\alpha q^x - y - \beta| < \frac{1}{t},$$

необходимо и достаточно, чтобы α было числом с ограниченным отношением.

Доказательство. Определим целые n и ν равенствами

$$q^{n-1} \leq t < q^n; \quad \frac{\nu}{q^n} \leq \{\beta\} < \frac{\nu+1}{q^n}.$$

Очевидно, будет $n \geq 1$ и $0 \leq \nu \leq q^n - 1$. Запишем дробь $\frac{\nu}{q^n}$ в q -ичной системе счисления: $\frac{\nu}{q^n} = 0, \beta_1 \dots \beta_n$.

В силу определения ν получим

$$\{\beta\} = 0, \beta_1 \dots \beta_n + \frac{\theta}{q^n} \quad (0 \leq \theta < 1).$$

Пусть α — число с ограниченным отношением. Тогда для некоторого x из интервала

$$0 \leq x \leq C_1 q^n \quad (5)$$

n -значное число $\delta_{x+1} \dots \delta_{x+n}$ совпадает с числом $\beta_1 \dots \beta_n$. Для указанного значения x будет

$$\{\alpha q^x\} = 0, \delta_{x+1} \dots \delta_{x+n} \delta_{x+n+1} \dots = 0, \beta_1 \dots \beta_n + \frac{\theta_1}{q^n} \quad (0 < \theta_1 < 1).$$

Выберем $y = [\alpha q^x] - [\beta]$, тогда

$$\alpha q^x - y - \beta = \{\alpha q^x\} - \{\beta\} = \frac{\theta - \theta_1}{q^n}. \quad (6)$$

* Каждый знак каждой из систем $\rho_k'(q)$ понимается здесь как очередной знак q -ичного разложения α .

Используя очевидные неравенства

$$\left| \frac{\theta - \theta_1}{q^n} \right| < \frac{1}{q^n} < \frac{1}{t}; \quad C_1 q^n < \frac{C_1}{q} t = Ct,$$

получим из (5) и (6)

$$0 \leq x < Ct; \quad |\alpha q^x - y - \beta| < \frac{1}{t},$$

чем доказана достаточность условий теоремы.

Пусть теперь α — произвольное число, для которого неравенства (2) разрешимы при любых β и $t \geq 1$. Допустим, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda(n)}{q^n} = \infty.$$

Тогда найдется последовательность целых $n_1 < n_2 < \dots$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda(n_k)}{q^{n_k}} = \infty$$

и, следовательно, найдется $k \geq 1$ такое, что

$$\lambda(n_k) > 2Cq^{n_k}.$$

Выберем $t = 2q^{n_k}$. В силу последнего неравенства на интервале $0 \leq x < Ct$ в q -ичном разложении $\alpha = 0, \delta_1 \dots \delta_{x+1} \dots \delta_{x+n_k} \dots$ встретится не каждое n_k -значное число. Пусть $\beta_1 \dots \beta_{n_k}$ — одно из таких не встретившихся n_k -значных чисел. Выберем $\beta = 0, \beta_1 \dots \beta_{n_k} + \frac{1}{2q^{n_k}}$.

Тогда для всех целых x и y ($0 \leq x < Ct$) будет

$$|\alpha q^x - y - \beta| \geq \frac{1}{2q^{n_k}} = \frac{1}{t},$$

что противоречит выбору α . Отсюда следует, что $\lambda(n) = O(q^n)$, чем теорема доказана полностью.

Приведем теперь без доказательства некоторые результаты для многомерного случая. Пусть q_1, \dots, q_s — произвольные целые, большие единицы. Будем для определенности считать, что $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_s$.

Определим числа $n_\nu = n_\nu(n)$ для целых $n \geq 1$ равенствами $n_\nu = \left[\frac{\ln q_1}{\ln q_\nu} n \right]$

и рассмотрим всевозможные группы знаков, каждая из которых состоит из s n_ν -значных чисел, записанных в системе счисления с основанием q_ν ($\nu = 1, 2, \dots, s$):

$$\left. \begin{array}{l} \beta_1^1 \beta_2^1 \dots \beta_{n_1}^1 \\ \beta_1^2 \beta_2^2 \dots \beta_{n_2}^2 \\ \dots \\ \beta_1^s \beta_2^s \dots \beta_{n_s}^s \end{array} \right\} \quad (7)$$

Группы считаем одинаковыми в том случае, когда каждое из n_ν -значных чисел одной из них совпадает со стоящим в той же строке n_ν -значным числом другой группы. Очевидно, при заданном n для числа $T(n)$ различных групп получим:

$$T(n) = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_s^{n_s} \leq q_1^{sn}.$$

Пусть величины $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ заданы своими разложениями в системах счисления соответственно с основаниями q_1, \dots, q_s :

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = 0, \delta_1^1 \dots \delta_{k+1}^1 \dots \delta_{k+n_1}^1 \dots \\ \alpha_2 = 0, \delta_1^2 \dots \delta_{k+1}^2 \dots \delta_{k+n_2}^2 \dots \\ \dots \\ \alpha_s = 0, \delta_1^s \dots \delta_{k+1}^s \dots \delta_{k+n_s}^s \dots \end{array}$$

Обозначим через $\lambda_s(n)$ наименьшее из чисел, обладающих тем свойством, что для $k = 0, 1, \dots, \lambda_s(n) - 1$ среди групп знаков

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{k+1}^1 \delta_{k+2}^1 \dots \delta_{k+n_1}^1 \\ \delta_{k+1}^2 \delta_{k+2}^2 \dots \delta_{k+n_2}^2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \delta_{k+1}^s \delta_{k+2}^s \dots \delta_{k+n_s}^s \end{array} \right\}$$

встретится любая из $T(n)$ возможных групп (7). (Предполагаем, что дробные доли системы функций $\alpha_1 q_1^x, \dots, \alpha_s q_s^x$ распределены всюду плотно.)

Числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, для которых существует константа $C_1 = C_1(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ такая, что для всех $n \geq 1$ будет $\frac{\lambda_s(n)}{q_1^{sn}} < C_1$, назовем числами с ограниченным общим отношением.

Доказательство существования чисел с ограниченным общим отношением основано на использовании свойств систем $r_n^\nu(i)$, состоящих из $t_n^\nu(i) = q_1^{n_1} \dots q_{\nu+1}^{n_{\nu+1}} + q_2^{n_2} \dots q_{\nu+1}^{n_{\nu+1}} + \dots + q_{\nu+1}^{n_{\nu+1}}$ знаков и определяемых для $\nu + i \leq s$ рекуррентными равенствами:

$$\begin{aligned} r_n^\nu(i) &= \underbrace{r_n^\nu(i-1) \dots r_n^\nu(i-1)}_v \underbrace{0 r_n^\nu(i-1) \dots r_n^\nu(i-1)}_v \underbrace{0 \dots}_v \dots \\ &\dots \underbrace{r_n^\nu(i-1) \dots r_n^\nu(i-1)}_v \underbrace{00 \dots 0}_v; \quad r_n^\nu(0) = \rho_{n_\nu}(q_\nu) \dots \rho_n(q_\nu). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь число фигурных скобок v равно общему наибольшему делителю чисел $q_{\nu+1}^{n_{\nu+1}}$ и $t_n^\nu(i-1)$, каждая фигурная скобка содержит $q_{\nu+1}^{n_{\nu+1}} \cdot v^{-1}$ систем $r_n^\nu(i-1)$; число нулей, стоящих после последней фигурной скобки, равно $q_{\nu+1}^{n_{\nu+1}} - v + 1$. Системы $r_n^\nu(i)$ понимаются в равенстве (8) как $t_n^\nu(i)$ -значные числа, записанные в системе счисления с основанием q_ν ; каждый знак каждой из систем $r_n^\nu(i-1)$ рассматривается при этом как очередной знак числа $r_n^\nu(i)$.

Теорема 3. Для любой положительной ограниченной целочисленной функции $\psi(k)$ числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, определенные равенствами $\alpha_\nu = 0, \underbrace{r_1^\nu(s-\nu) \dots r_1^\nu(s-\nu)}_{\psi(1)} \dots \underbrace{r_h^\nu(s-\nu) \dots r_h^\nu(s-\nu)}_{\psi(k)} \dots$ ($\nu = 1, 2, \dots, s$)

являются числами с ограниченным общим отношением.

Теорема 4. Для того чтобы существовала константа C , при которой для всех $t \geq 1$ и любых β_1, \dots, β_s была разрешима система неравенств

$$0 \leq x \leq Ct^s; \quad \left. \begin{array}{l} |\alpha_1 q_1^x - y_1 - \beta_1| < \frac{1}{t} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ |\alpha_s q_s^x - y_s - \beta_s| < \frac{1}{t} \end{array} \right\}$$

необходимо и достаточно, чтобы числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ были числами с ограниченным общим отношением.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
14 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Я. Хинчин, Цепные дроби, 1949. ² Н. М. Коробов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 215 (1950). ³ Н. М. Коробов, там же, 15, № 1, 17 (1951).