

В. А. ЕФРЕМОВИЧ и А. С. ШВАРЦ

НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ. МЕТРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ БЛИЗОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 I 1953)

В 1936 г. одним из авторов ⁽¹⁾ при попытке аксиоматизировать понятие равномерной непрерывности было намечено три возможных пути: 1) через отношение бесконечной близости двух множеств: $A \delta B$ ($\rho(A, B) = 0$ в метрическом пространстве) — развитие точки зрения П. Александрова и К. Куратовского на топологическое пространство; 2) через равномерные системы окрестностей (аксиоматизация системы ε -окрестностей в метрическом пространстве) — развитие точки зрения Ф. Хаусдорфа; 3) через отношение эквивалентности обобщенных последовательностей $x_\alpha \sim y_\alpha$ (обобщение сближающихся последовательностей в метрическом пространстве: $x_n \sim y_n$ означает $\rho(x_n, y_n) \rightarrow 0$) — развитие точки зрения М. Фреше. Тогда же А. Н. Колмогоров обратил внимание на желательность систематического исследования каждого пути. Первый путь привел к построению пространств близости ^(1, 2); второй привел к построению равномерных (униформных) пространств ⁽³⁾. Что эти два пути в общем случае приводят к разным результатам, впервые показала Н. Рамм ⁽⁶⁾.

Оказывается, что третий путь (и это показал другой из авторов) приводит, как и второй путь, к построению равномерных пространств (§ 1). Им же установлена теорема метризации пространств близости (§ 3) на основе понятия слабой эквивалентности обобщенных последовательностей в этих пространствах, исследованной ранее первым автором (§ 2). Чтобы придти естественным образом к новому определению равномерного пространства, исходим из понятия равномерного пространства в смысле А. Вейля (терминологию см. ⁽⁴⁾).

1: В равномерном пространстве определено отношение эквивалентности обобщенных последовательностей (направленных систем) *. Именно, полагаем $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$), если для каждого окружения V равномерной структуры, начиная с некоторого α , имеем $(x_\alpha, y_\alpha) \in V$. Нетрудно видеть, что определенное таким образом отношение \sim рефлексивно, симметрично и транзитивно, что позволяет нам назвать его эквивалентностью. Легко показать, что равномерно непрерывное отображение равномерного пространства R в равномерное пространство R' можно определить как отображение, сохраняющее отношение эквивалентности обобщенных последовательностей. Более того, чтобы отображение было

* Направлением называется частично упорядоченное множество A , удовлетворяющее следующему условию: если $\alpha' \in A$, $\alpha'' \in A$, то существует такое $\alpha \in A$, что $\alpha > \alpha'$, $\alpha > \alpha''$. Подмножество A' направления A называется конфинальным A , если для всякого $\alpha \in A$ существует $\alpha' \in A'$, $\alpha' > \alpha$. Свойство элементов направления выполняется, начиная с некоторого α , если оно выполняется для всех α' , следующих за α . Направленной системой или обобщенной последовательностью в пространстве R называется отображение некоторого направления A в R . Это направление называется системой индексов обобщенной последовательности.

равномерно непрерывным, достаточно потребовать, чтобы оно сохраняло эквивалентность последовательностей, мощность системы индексов которых не превышает 2^μ , где μ — мощность множества R .

Эти простые замечания наводят на мысль, что равномерная структура пространства может быть определена с помощью задания отношения эквивалентности обобщенных последовательностей.

Определение. Пусть дано множество R , элементы которого мы будем называть точками, и пусть для каждого двух обобщенных последовательностей в R : x_α и y_α ($\alpha \in A$) таких, что $\bar{A} \leq 2^\mu$, определено, эквивалентны они или нет: $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$) или $x_\alpha \not\sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$). Отношение эквивалентности предполагается, как обычно, рефлексивным, симметричным и транзитивным, а также удовлетворяющим аксиомам:

Р. 1. Если x_α и y_α — стационарные обобщенные последовательности (т. е. $x_\alpha = x$, $y_\alpha = y$ для любого $\alpha \in A$) и $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$), то $x = y$.

Р. 2. Если $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$), то для любого A' , конфинального A , имеем $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A'$).

Р. 3. Если $x_\alpha \not\sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$), то существует такое A' , конфинальное A , что $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ вполне неэквивалентно $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A'}$. При этом множество $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ называется вполне неэквивалентным множеству $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A'}$, если две любые последовательности z_β , t_β ($\beta \in B$), $\bar{B} \leq 2^\mu$, такие, что $\{z_\beta, t_\beta\}_{\beta \in B} \subset \{x_\alpha, y_\alpha\}_{\alpha \in A'}$, неэквивалентны.

Будем говорить, что на R определена равномерная структура.

Это новое определение равномерного пространства инвариантно также и по форме. Докажем равносильность его определению А. Вейля. Для этого достаточно показать, во-первых, что каждая равномерная структура Вейля определяет равномерную структуру в новом смысле; во-вторых, что две равномерные структуры Вейля, порождающие одну и ту же равномерную структуру в новом смысле, совпадают; в-третьих, что для каждой равномерной структуры в новом смысле существует равномерная структура Вейля, ее порождающая. Первые два утверждения доказываются совсем просто. План доказательства намечен в начале этого параграфа. Там указан переход от равномерной структуры в смысле Вейля к равномерной структуре в новом смысле, т. е. определена эквивалентность обобщенных последовательностей, удовлетворяющая, как легко видеть, аксиомам Р. 1 — Р. 3. Второе утверждение вытекает из того, что если две равномерные структуры в смысле Вейля на R порождают одну и ту же эквивалентность последовательностей с мощностью множества индексов $\leq 2^\mu$, то тождественное отображение R на себя оказывается в обе стороны равномерно непрерывным, т. е. равномерные структуры совпадают. Докажем третье утверждение. Пусть на R задана равномерная структура в новом смысле. Тогда для $V \subset R \times R$ положим $V \in \mathfrak{B}$, если для любых двух эквивалентных последовательностей $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$) найдется α , начиная с которого $(x_\alpha, y_\alpha) \in V$. Положим теперь $x_\alpha \approx y_\alpha$ ($\alpha \in A$), если для каждого $V \in \mathfrak{B}$ найдется α , начиная с которого $(x_\alpha, y_\alpha) \in V$. Ясно, что $x \sim y$ ($\alpha \in A$) влечет за собой $x_\alpha \approx y_\alpha$ ($\alpha \in A$). Покажем, что $x_\alpha \not\sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$) влечет $x_\alpha \not\approx y_\alpha$ ($\alpha \in A$). Выберем A' по аксиоме Р. 3 и покажем, что $W = R \times R \setminus \{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in A'} \in \mathfrak{B}$. Предположим обратное. Тогда найдутся такие эквивалентные последовательности $z_\beta \sim t_\beta$ ($\beta \in B$), что множество B' тех β , для которых $(z_\beta, t_\beta) \in W$, конфинально B . По Р. 2 $z_\beta \sim t_\beta$ ($\beta \in B'$) и в то же время $\{(z_\beta, t_\beta)\}_{\beta \in B'} \subset \{(x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in A'}$, что невозможно.

Итак, $W \in \mathfrak{B}$. Но тогда $x_\alpha \not\approx y_\alpha$ ($\alpha \in A'$) и, значит, $x_\alpha \not\sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$). Мы показали, что для последовательностей с мощностью множества

индексов $\leq 2^u$ отношение $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$) равносильно отношению $x_\alpha \approx y_\alpha$ ($\alpha \in A$). Проверим теперь, что \mathfrak{B} удовлетворяет аксиомам равномерного пространства в смысле Вейля. Выполнение аксиом фильтра очевидно: если $V \in \mathfrak{B}$ и $V \subset W$, то $W \in \mathfrak{B}$, и если $V_1 \in \mathfrak{B}$, $V_2 \in \mathfrak{B}$, то $V = V_1 \cap V_2 \in \mathfrak{B}$. Аксиома U_I (4) непосредственно следует из рефлексивности отношения эквивалентности и из P. 1. Выполнение U_{II} следует из симметричности отношения эквивалентности. Предположим, что аксиома U_{III} не выполнена. Тогда для некоторого $W \in \mathfrak{B}$ и любого $V \in \mathfrak{B}$ имеем: $(R \times R \setminus W) \cap V^2 \neq \emptyset$. Это значит, что для любого V найдутся $(x_V, y_V) \in V$, $(y_V, z_V) \in V$ такие, что $(x_V, z_V) \notin W$. Полагаем $V' \supset V$, если $V' \subset V$. В силу выполнения аксиом фильтра множество \mathfrak{B} является направлением относительно этого упорядочения. Имеем $x_V \approx y_V$, $y_V \approx z_V$, $x_V \not\approx z_V$ ($V \in \mathfrak{B}$). Так как $\overline{\mathfrak{B}} \leq 2^u$, знак \approx может быть заменен знаком \sim , и, следовательно, отношение \sim не транзитивно, что противоречит предположению. Итак, выполнение U_{III} доказано. Вместе с тем доказана равносильность нового определения определению Вейля.

2. В терминах эквивалентности находят удобное выражение основные понятия теории равномерных пространств. Мы приведем ряд определений (равносильность обычным легко показать). Ясно, что приведенное выше определение вполне неэквивалентных множеств $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пригодно для A произвольной мощности. Эквивалентные направленные системы с системой индексов любой мощности определяются как системы, не содержащие конфинальных вполне неэквивалентных подсистем. Равномерно непрерывные отображения определяются как отображения, сохраняющие эквивалентность последовательностей (с множеством индексов произвольной мощности).

В равномерном пространстве естественным образом определено отношение близости между множествами. Именно: P близко Q ($P \delta Q$), если из них можно выделить эквивалентные обобщенные последовательности $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$), $x_\alpha \in P$, $y_\alpha \in Q$ для любого $\alpha \in A$. Тем самым равномерное пространство, как легко видеть, превращается в пространство близости.

В пространстве близости можно определить отношение слабой эквивалентности направленных систем: $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$), если для любого A' , конфинального A , имеем $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A'} \delta \{y_\alpha\}_{\alpha \in A'}$.

Легко показать, что отношение \sim рефлексивно, симметрично, транзитивно и удовлетворяет аксиомам P. 1—P. 3, т. е. в пространстве определена равномерная структура. Для того чтобы доказать, что эта равномерная структура порождает исходное пространство близости, проще всего воспользоваться тем фактом, что каждое пространство близости порождается некоторой равномерной структурой (5). Действительно, пусть δ' — близость, порождаемая нашей равномерной структурой. Ясно, что из $P \delta' Q$ следует $P \delta Q$. Но если $P \delta Q$, то можно выделить обобщенные последовательности $x_\alpha \approx y_\alpha$ ($\alpha \in A$), $x_\alpha \in P$, $y_\alpha \in Q$ (\approx обозначает эквивалентность какой-либо равномерной структуры, совместимой с близостью). Отсюда $x_\alpha \sim y_\alpha$ ($\alpha \in A$), т. е. $P \delta' Q$. Вполне очевидно, что построенная нами равномерная структура будет наименее тонкой (минимальной) среди равномерных структур, порождающих данное пространство близости. Существование такой структуры и ее прекомпактность были ранее показаны Ю. Смирновым (5).

Из полученной характеристики минимальной структуры следует, например, что инфинитезимально непрерывное отображение пространства близости в равномерное пространство равномерно непрерывно относительно минимальной равномерной структуры в пространстве близости. (Этот результат был впервые получен Н. Рамм.)

3. Воспользуемся полученными результатами, чтобы установить теорему метризации для пространств близости.

Пусть R — пространство близости. Положим $V \in \mathfrak{B}$, если $V \subset R \times R$ и для любых двух эквивалентных последовательностей $x_n \sim y_n$ ($n = 1, 2, \dots$), начиная с некоторого n , имеет место: $(x_n, y_n) \in V$.

Теорема. Для того чтобы пространство близости R было метризуемо, необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1) Из любых двух близких множеств $P \delta Q$ можно выделить эквивалентные последовательности $x_n \sim y_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $x_n \in P$, $y_n \in Q$ для любого n . 2) Из системы \mathfrak{B} можно выделить счетную эквивалентную подсистему \mathfrak{B}' (т. е. такую подсистему, что для каждого $V \in \mathfrak{B}$ существует $V' \in \mathfrak{B}'$ такое, что $V' \subset V$).

Доказательство. Достаточность. Как и при доказательстве равносильности определений равномерной структуры, определим отношение $x_\alpha \approx y_\alpha$ ($\alpha \in A$) и докажем, что для счетных последовательностей оно совпадает с отношением \sim , а также покажем, что система \mathfrak{B} удовлетворяет аксиомам фильтра и аксиомам U_I, U_{II} (4).

Выделим теперь из системы \mathfrak{B}' последовательность V_1, V_2, \dots , эквивалентную системе \mathfrak{B}' , а значит, и системе \mathfrak{B} и удовлетворяющую условию $V_{n+1} \subset V_n$. Проверим выполнение аксиомы U_{III} . Действительно, если она не выполнена, то можно найти такое $W \in \mathfrak{B}$, что $V_n^2 \setminus W$ не пусто для любого n , т. е. для каждого n существуют $(x_n, y_n) \in V_n$, $(y_n, z_n) \in V_n$ такие, что $(x_n, z_n) \notin W$.

Имеем $x_n \sim y_n$, $y_n \sim z_n$, $x_n \not\sim z_n$ ($n = 1, 2, \dots$) (так как для обычных последовательностей знак \approx можно заменить знаком \sim), что противоречит транзитивности эквивалентности \sim . Как показал А. Вейль, условие 2 обеспечивает метризуемость равномерной структуры, заданной системой окружений \mathfrak{B} . Условие 1 обеспечивает совместимость этой равномерной структуры с исходным пространством близости.

Необходимость. Пусть ρ — метрика, порождающая пространство близости R . Положим $V_n = \{(x, y)\}_{\rho(x, y) < 1/n}$, $n = 1, 2, \dots$. Выполнение условия 1 очевидно. Покажем, что система $\mathfrak{B}' = \{V_n\}_{n=1,2,\dots}$ удовлетворяет условию 2. Ясно, что $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$. Пусть $V \in \mathfrak{B}$. Предположим, что для любого $V_n \in \mathfrak{B}$ разность $V_n \setminus V$ не пуста. Выберем для каждого n пару $(x_n, y_n) \in V_n \setminus V$. Очевидно, $x_n \sim y_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Но тогда $V \notin \mathfrak{B}$, что противоречит предположению. Теорема доказана. Теорему легко сформулировать также в терминах покрытий.

Метризуемое пространство близости можно охарактеризовать как пространство близости, порождаемое равномерной структурой, которая может быть задана счетной системой окружений (или покрытий).

Обобщая только что доказанную теорему метризации, можно дать необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство близости порождалось равномерной структурой, которая может быть задана системой окружений (или покрытий) мощности τ .

Отметим еще, что условие 1 теоремы метризации является, как это можно показать, достаточным условием для существования максимальной (наиболее тонкой) равномерной структуры в множестве равномерных структур, порождающих данное пространство близости.

Поступило
23 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Ефремович, ДАН, 76, № 3, 341 (1951). ² В. А. Ефремович, Матем. сборн., 31:1, 189 (1952). ³ A. Weil, Actualités scientifiques et industrielles, 551 (1937). ⁴ N. Bourbaki, ibid., 858 (1940). ⁵ Ю. М. Смирнов, ДАН, 84, № 5, 895 (1952). ⁶ Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., 31:3, 543 (1952).