Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 3

МАТЕМАТИКА

Г. ГЕОРГИЕВ

ФОРМУЛЫ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР С РАВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 13 I 1953)

В статье [1] мы установили формулы вида

$$\iint\limits_R P(x, y)\,dx\,dy = \sum_{l=1}^{N} \lambda_l P(x_i, y_l),$$

$$\iiint P(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{l=1}^{N} \lambda_l P(x_i, y_i, z_l)$$

механических квадратур с минимальным числом членов для двойных и тройных интегралов.

В настоящей статье приводятся формулы механических квадратур для случаев, когда коэффициенты λ_l равны.

Формулы для двойных интегралов. Обозначим через $C_n^{(2)}$ множество всех полиномов $P(x, y)$ действительных переменных x, y, степень которых не превышает натурального числа n. Пусть R есть двумерная область такая, что двойные интегралы

$$I_{kr} = \iint\limits_R x^k y^r\,dx\,dy \quad (k \geqslant 0,\ r \geqslant 0,\quad k + r \leqslant n)$$

существуют. Условимся говорить, что существует формула механических квадратур с минимальным числом членов и с равными коэффициентами, применимая к множеству $C_n^{(2)}$, если возможно определить минимальное натуральное число N и действительные числа λ, x_i, y_i $(i \leqslant N)$ таким образом, что формула

$$\iint\limits_R P(x, y)\,dx\,dy = \lambda \sum_{l=1}^{N} P(x_l, y_i) \tag{1}$$

будет верна для всякого полинома $P(x, y) \in C_n^{(2)}$.

Получаются следующие результаты:

1°. Для того чтобы определить все формулы вида (1), применимые к множеству $C_2^{(2)}$ и произвольной двумерной области R, вводим полином

$$F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & z & x & y \\ \zeta & I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ \xi & I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ \eta & I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}.$$

Так как Δ является определителем положительно-определенной квадратичной формы $I(u, v, w) = \iint (ux + vy + w)^2 \, dx\, dy$, то $\Delta > 0$.

Согласно определению функции F будем иметь:

I. $F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = F(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$.

II. $\iint\limits_R F^2(x, y, 1; \xi, \eta, 1)\, d\xi\, d\eta = F(x, y, 1; x, y, 1) > 0$.

III. Кривая второго порядка $F(x, y, 1; x, y, 1) = c/I_{00}$ $(c > 1)$ есть действительный эллипс с центром $M_0(x_0, y_0)$, $x_0 = I_{10}/I_{00}$, $y_0 = I_{01}/I_{00}$.

С помощью этих замечаний устанавливается следующая теорема:

Теорема 1. *Существует бесконечное множество формул механических квадратур с минимальным числом членов и с равными коэффициентами, применимых к множеству $C_2^{(2)}$ и произвольной двумерной области R. Эти формулы трехчленны:*

$$\iint\limits_R P(x, y)\, dx\, dy = \lambda \sum_{i=1}^{3} P(x_i, y_i),$$

где $\lambda = I_{00}/3$, а координаты x_i, y_i удовлетворяют уравнениям

$$F(x_i, y_i, 1; x_i, y_i, 1) = \frac{3}{I_{00}}, \qquad F(x_k, y_k, 1; x_r, y_r, 1) = 0 \qquad (k < r),$$

т. е. треугольник с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ является вписанным в эллипс $F(x, y, 1; x, y, 1) = 3/I_{00}$ и одновременно описанным около эллипса $F(x, y, 1; x, y, 1) = 3/2I_{00}$. Точки $M_i(x_i, y_i)$ можно получить, выбрав одну из них (ξ, η) на эллипсе $F(x, y, 1; x, y, 1) = 3/I_{00}$ произвольно, а две другие определяя как точки пересечения этого эллипса с прямой $F(x, y, 1; \xi, \eta, 1) = 0$.

2°. Для того чтобы определить все формулы вида (1), применимые к множеству $C_3^{(2)}$ и двумерной области R, симметричной относительно начала координат, вводим полином

$$f(x, y; \xi, \eta) = -\frac{I_{00}}{\delta} \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ \xi & I_{20} & I_{11} \\ \eta & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} I_{20} & I_{11} \\ I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}.$$

Так как δ является определителем положительно-определенной квадратичной формы $I(u, v) = \iint (ux + vy)^2\, dx\, dy$, то $\delta > 0$.

Согласно определению функции f, будем иметь:

I. $f(x, y; \xi, \eta) = f(\xi, \eta; x, y)$.

II. $\iint\limits_R f^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = I_{00} f(x, y; x, y) > 0$ для $x^2 + y^2 > 0$.

III. Кривая второго порядка $f(x, y; x, y) = c$ $(c > 0)$ есть эллипс с центром в начале координат.

С помощью этих замечаний устанавливается следующая теорема:

Теорема 2. *Существует бесконечное множество формул механических квадратур с минимальным числом членов и с равными коэффициентами, применимых к множеству $C_3^{(2)}$ и двумерной области R, симметричной относительно начала координат. Эти формулы четырехчленны:*

$$\iint\limits_R P(x, y)\, dx\, dy = \lambda \sum_{i=1}^{4} P(x_i, y_i),$$

где $\lambda = I_{00}/4$, а четыре точки $M_i(x_i, y_i)$ являются вершинами параллелограмма, вписанного в эллипс $f(x, y; x, y) = 2$ и одновременно описанного около эллипса $f(x, y; x, y) = 1$. Каждая точка эллипса $f(x, y; x, y) = 2$ является вершиной одного такого параллелограмма, а четыре касательные к эллипсу $f(x, y; x, y) = 1$ в концевых точках двух сопряженных диаметров являются сторонами одного такого параллелограмма.

Формулы для тройных интегралов. Обозначим через $C_n^{(3)}$ множество всех полиномов $P(x, y, z)$ действительных переменных x, y z, степень которых не превышает натурального числа n. Пусть R есть трехмерная область такая, что тройные интегралы

$$I_{klr} = \iiint\limits_R x^k y^l z^r \, dx\, dy\, dz \quad (k \geqslant 0,\ l \geqslant 0,\ r \geqslant 0,\ k + l + r \leqslant n)$$

существуют. Условимся говорить, что существует формула механических квадратур с минимальным числом членов и с равными коэффициентами, применимая к множеству $C_n^{(3)}$, если возможно определить минимальное натуральное число N и действительные числа λ, x_i, y_i, z_i $(i \leqslant N)$ таким образом, что формула

$$\iiint\limits_R P(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lambda \sum_{i=1}^{N} P(x_i, y_i, z_i) \tag{2}$$

будет верна для всякого полинома $P(x, y, z) \in C_n^{(3)}$.

Получаются следующие результаты:

1°. Для того чтобы определить все формулы вида (2) для множества $C_2^{(3)}$ и произвольной трехмерной области R, вводим полином

$$\Phi(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & t & x & y & z \\ \tau & I_{000} & I_{100} & I_{010} & I_{001} \\ \xi & I_{100} & I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ \eta & I_{010} & I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ \zeta & I_{001} & I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} I_{000} & I_{100} & I_{010} & I_{001} \\ I_{100} & I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ I_{010} & I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ I_{001} & I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{vmatrix}.$$

Так как Δ является определителем положительно-определенной квадратичной формы $I(u, v, w, \vartheta) = \iiint (ux + vy + wz + \vartheta)^2\, dx\, dy\, dz$, то $\Delta > 0$.

Согласно определению функции Φ, будем иметь:

I. $\Phi(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta, \tau) = \Phi(\xi, \eta, \zeta, \tau; x, y, z, t)$.

II. $\Phi^2(x, y, z, 1; \xi, \eta, \zeta, 1)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \Phi(x, y, z, 1; x, y, z, 1) > 0$.

III. Поверхность второго порядка $\Phi(x, y, z, 1; x, y, z, 1) = c/I_{000}$ $(c > 1)$ есть действительный эллипсоид с центром $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $x_0 = I_{100}/I_{000}$, $y_0 = I_{010}/I_{000}$, $z_0 = I_{001}/I_{000}$.

С помощью этих замечаний устанавливается следующая теорема:

Теорема 3. *Существует бесконечное множество формул механических квадратур с минимальным числом членов и с равными коэффициентами, применимых к множеству $C_2^{(3)}$ и произвольной трехмерной области R. Эти формулы четырехчленны:*

$$\iiint\limits_R P(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lambda \sum_{i=1}^{4} P(x_i, y_i, z_i),$$

где $\lambda = I_{000}/4$, *а координаты* x_i, y_i, z_i *удовлетворяют уравнениям*

$$\Phi(x_i, y_i, z_i, 1; x_i, y_i, z_i, 1) = \frac{4}{I_{000}} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$\Phi(x_k, y_k, z_k, 1; x_r, y_r, z_r, 1) = 0 \quad (k < r).$$

Таким образом, тетраэдр с вершинами $M_i(x_i, y_i, z_i)$ *является описанным около эллипсоида* $\Phi(x, y, z, 1; x, y, z, 1) = 4/3I_{000}$ *и одновременно вписанным в эллипсоид* $\Phi(x, y, z, 1; x, y, z, 1) = 4/I_{000}$. *Каждая точка последнего эллипсоида является вершиной бесконечного множества тетраэдров этого вида.*

2°. Для того чтобы определить все формулы вида (2), применимые к множеству $C_3^{(3)}$ и трехмерной области R, симметричной относительно начала координат, вводим полином:

$$\varphi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{I_{000}}{\delta}\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ \xi & I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ \eta & I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ \zeta & I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{vmatrix}.$$

Так как δ является определителем положительно-определенной квадратичной формы $I(u, v, w) = \iiint (ux + vy + wz)^2\, dx\, dy\, dz$, то $\delta > 0$.

Согласно определению функции φ, будем иметь:

I. $\varphi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi, \eta, \zeta; x, y, z)$.

II. $\iiint\limits_R \varphi^2(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = I_{000}\, \varphi(x, y, z; x, y, z) > 0$ для $x^2 + y^2 + z^2 > 0$.

III. Поверхность второго порядка $\varphi(x, y, z; x, y, z) = c \quad (c > 0)$ есть эллипсоид с центром в начале координат.

С помощью этих замечаний доказывается следующая теорема:

Теорема 4. *Существует бесконечное множество формул вида* (2), *применимых к множеству* $C_3^{(3)}$ *и трехмерной области* R, *симметричной относительно начала координат. Эти формулы шестичленны:*

$$\iiint\limits_R P(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lambda \sum_{i=1}^{6} P(x_i, y_i, z_i),$$

где $\lambda = I_{000}/6$. *Координаты первых трех точек* $M_i(x_i, y_i, z_i)$ *удовлетворяют уравнениям* $\frac{1}{\varphi_{11}} + \frac{1}{\varphi_{22}} + \frac{1}{\varphi_{33}} = 1$, $\varphi_{12} = 0$, $\varphi_{13} = 0$, $\varphi_{23} = 0$ $(\varphi_{kr} = \varphi(x_k, y_k, z_k; x_r, y_r, z_r))$, *а координаты остальных трех точек* M_i *определяются по формулам* $x_{i+3} = -x_i$, $y_{i+3} = -y_i$, $z_{i+3} = -z_i$ $(i = 1, 2, 3)$. *Таким образом, точки* M_i *являются вершинами октаэдра, описанного около эллипсоида* $\varphi(x, y, z; x, y, z) = 1$ *и одновременно вписанного в эллипсоид* $\varphi(x, y, z; x, y, z) = 2$ *так, что симметричная точка относительно начала координат каждой его вершины является также его вершиной.*

Софийский государственный
политехнический институт им. И. В. Сталина
София (Болгария)

Поступило
26 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Георгиев, ДАН, 83, № 4 (1952).