

В. И. КАРПМАН

К ВОПРОСУ О СВЯЗИ МЕЖДУ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ  
И ТЕОРИЕЙ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 5 I 1953)

Метод регулярирования <sup>(1)</sup> состоит в том, что сингулярные дельта-функции  $\Delta_0(x)$ ,  $\Delta(x)$  и  $\Delta^{(1)}(x)$ \*, определяющие перестановочные соотношения для компонент волновой функции электрона и функцию Грина уравнения Дирака, заменяются на

$$\begin{aligned}\Delta_{0R}(x) &= \sum_{r=0}^s c_r \Delta_0(x, M_r), & \Delta_R(x) &= \sum_{r=0}^s c_r \Delta(x, M_r), \\ \Delta_R^{(1)}(x) &= \sum_{r=0}^s c_r \Delta^{(1)}(x, M_r),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $M_r$  ( $r > 0$ ) — вспомогательные массы;  $M_0 = m$  — масса электрона и коэффициенты  $c_r$  удовлетворяют условиям

$$\sum_{r=0}^s c_r = 0, \quad \sum_{r=0}^s c_r M_r^2 = 0.\tag{2}$$

Благодаря (2)  $\Delta_{0R}(x)$ ,  $\Delta_R(x)$ ,  $\Delta_R^{(1)}(x)$  и их первые производные оказываются регуляризованными, т. е. не содержат особенностей на световом конусе.

Несмотря на большие успехи этого метода, существенным недостатком его является то, что до сих пор не найдено удовлетворительного объяснения физического смысла дополнительных масс, вводимых формально и устремляемых в конце вычисления к бесконечности, вследствие чего теория регуляризации до сих пор носит формалистический характер.

С другой стороны, в настоящее время разработана теория волновых полей, описывающих частицы с набором различных спиновых состояний и соответствующим спектром масс <sup>(2)</sup>. Уравнение, описывающее частицы такого типа, может быть написано в виде

$$(L^k \nabla_k + i\kappa) \psi = 0 \quad (\nabla_k = \partial / \partial x^k; \quad k = 0, 1, 2, 3),\tag{3}$$

где  $L^k$  — матрицы, свойства которых исчерпывающим образом изучены в <sup>(2)</sup>,  $\kappa$  — вещественная постоянная, отличная от нуля (мы пользуемся системой единиц, в которой  $c = \hbar = 1$ ).

В дальнейшем мы рассматриваем только не распадающиеся уравнения типа (3), которые соответствуют одной частице, а не набору

\* Мы пользуемся обозначениями работы <sup>(1)</sup>.

частиц. Кроме того речь идет только об уравнениях с положительно определенной энергией (в случае целого спина) или положительно (отрицательно) определенным зарядом (в случае полуцелого спина).

Было бы в высшей степени удовлетворительным, если бы удалось связать набор масс частицы, описываемой уравнением (3), с массами, содержащимися в выражениях (1), (2) регуляризационного метода. Более точно, будут ли регуляризационные условия выполнены автоматически для частицы с набором спиновых состояний, имеющей спектр масс  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ ? Мы покажем, что ответ на этот вопрос должен быть отрицательным.

Докажем прежде всего, что перестановочные соотношения для компонент волновой функции частицы с произвольным спином не являются регуляризованными в случае наличия у частицы спектра масс.

Согласно работе (3), перестановочные соотношения для частицы с произвольным спином имеют вид\*

$$i[\psi_\rho(x), \bar{\psi}_\sigma(x')]_{\pm} = \sum_{r=1}^s F_r(\partial/\partial x) b_r \Delta(x-x'; \mu_r), \quad (4)$$

где  $s$  — число масс частицы и

$$b_r = \text{const} \prod_{i=1}^s \mu_i^2 / \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^s (\mu_i^2 - \mu_r^2), \quad (5)$$

т. е. являются с точностью до постоянного множителя регуляризационными коэффициентами, полученными в (4). Чтобы получить оператор  $F_r(\partial/\partial x)$ , действующий на функцию  $\Delta(x-x'; \mu_r)$ , надо, согласно (3) (стр. 1348), написать минимальный полином матрицы  $L^0$  или эквивалентное ему соотношение

$$(L^k \nabla_k)^n [(L^k \nabla_k)^2 - \lambda_1^2 \square] \dots [(L^k \nabla_k)^2 - \lambda_s^2 \square] = 0 \quad (6)$$

( $\pm \lambda_1, \pm \lambda_2, \dots, \pm \lambda_s$ ) обозначают все различные, отличные от нуля собственные значения  $L^0$ , связанные с массами частицы соотношением  $\mu_r^2 = \kappa^2/\lambda_r^2$  и заменить в операторе, стоящем в левой части (6), скобку, содержащую  $\lambda_r$ , выражением  $(L^k \nabla_k - i\kappa)$ .

Таким образом, перестановочные соотношения для частицы с произвольным спином имеют вид:

$$i[\psi_\rho(x), \bar{\psi}_\sigma(x')]_{\pm} = C_{\rho\sigma}(x-x') = \sum_{r=1}^s \{(L^k \nabla_k - i\kappa)(L^k \nabla_k)^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^s [(L^k \nabla_k)^2 - \lambda_i^2 \square]\}_{\rho\sigma} b_r \Delta(x-x'; \mu_r). \quad (7)$$

Выражение, стоящее в правой части (7), после некоторых преобразований можно привести к виду

$$C(x-x') = -(i\kappa)^{n+2s-1} P(\square, L^k \nabla_k) \sum_{r=1}^s b_r \Delta(x-x'; \mu_r), \quad (8)$$

где

$$P(\square, L^k \nabla_k) = \square^s a_s + \square^{s-1} a_{s-1} + \dots + a_0, \quad (9)$$

причем коэффициенты  $a_r$  являются в свою очередь полиномами от

\*  $[\psi_s(x), \bar{\psi}_\sigma(x')]_{\pm} = \psi_\rho(x) \bar{\psi}_\sigma(x') \pm \bar{\psi}_\sigma(x') \psi_\rho(x)$ . Знак плюс берется для полуцелого спина, а минус — для целого.

$L^k \nabla_k$  (но не от  $\square$ ) и наивысший показатель степени  $s$  равен числу масс\*. Функция  $\Delta_R(x) = \sum_i b_i \Delta(x; \mu_i)$ , стоящая в (8), является, как легко видеть, регуляризованной и удовлетворяет уравнению

$$(\square - \mu_1^2)(\square - \mu_2^2) \dots (\square - \mu_s^2) \Delta_R(x) = 0.$$

Тем не менее, все выражение (8) и, следовательно, перестановочные соотношения (7) не являются регуляризованными. Чтобы показать это, достаточно рассмотреть условия регуляризации выражения  $(\square^m \Delta_R(x))$ , где  $m$  — целое число. Очевидно,

$$\square^m \Delta_R(x) = \sum_{i=1}^s b_i \square^m \Delta(x; \mu_i) = \sum_{i=1}^s b_i \mu_i^{2m} \Delta(x; \mu_i). \quad (10)$$

Условие регуляризации  $\square^m \Delta_R(x)$  должно поэтому быть таким:

$$\sum_{i=1}^s b_i \mu_i^{2m} = 0, \quad \sum_{i=1}^s b_i \mu_i^{2m+2} = 0. \quad (11)$$

Если  $s$  — число масс в спектре, то, как нетрудно показать, регуляризационные коэффициенты  $b_i$  удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^s b_i \mu_i^{2l} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, s-2, \quad (12)$$

причем  $\sum_{i=1}^s b_i \mu_i^{2(s-1)} \neq 0$ . Следовательно, для выполнения (11) должно быть:  $m+1 \leq s-2$ , т. е.  $m \leq s-3$ . Поэтому  $\square^s \Delta_R(x)$ ,  $\square^{s-1} \Delta_R(x)$ ,  $\square^{s-2} \Delta_R(x)$ , входящие в (9), оказываются нерегуляризованными, и, таким образом, перестановочные соотношения (7) также будут нерегуляризованными. Точно так же оказывается нерегуляризованной функция Грина уравнения (3). Можно показать, что функция Грина уравнения (3) равна

$$G(x-x') = (L^k \nabla_k + ix)^{-1} \delta(x-x') = T(L^k \nabla_k) \sum_{i=1}^s b_i \Delta_F(x-x'; \mu_i), \quad (13)$$

где

$$ix T(L^k \nabla_k) = P(\square, L^k \nabla_k) = \sum_{m=1}^{n+2s-3} \left(\frac{1}{x}\right)^m (L^k \nabla_k)^m. \quad (14)$$

$P(\square, L^k \nabla_k)$  берется из (7)–(9). Из (7), (14) следует, что  $T(L^k \nabla_k)$  является полиномом от  $L^k \nabla_k$  степени  $n+2s-1$ . Из (13), (14) сразу же следует высказанное утверждение\*\*.

\* Для случая  $s=3$  получается, например, такое выражение:

$$\begin{aligned} - (ix)^{n+5} P(\square, L^k \nabla_k) &= (L^k \nabla_k)^n (L^k \nabla_k - ix) \{ (L^k \nabla_k)^4 + \\ &+ \frac{x^2 (L^k \nabla_k)^2 \square^2}{\mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2} (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2) - \frac{x^2 \square^3}{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2} [(L^k \nabla_k)^2 - x^2] \}. \end{aligned}$$

\*\* Из вышеизложенного, между прочим, следует ошибочность результатов работы (6), рассматривающей вопрос, затронутый в настоящей заметке. Ошибочные результаты получились по следующей причине: автор считает, что если функция  $\Delta_R = \sum_i b_i \Delta(x-x'; \mu_i)$  является регуляризованной, то и выражение  $P(\square, L^k \nabla_k) \Delta_R(x-x')$  тоже будет всегда регуляризованным. Между тем, как видно из (9),  $P(\square, L^k \nabla_k) \Delta_R$  содержит члены  $\square^m \Delta_R$ , которые при  $m=s, s-1, s-2$  ( $s$  — число масс) оказываются нерегуляризованными.

Выводы настоящей работы можно подтвердить непосредственным вычислением радиационных поправок, которые оказываются расходящимися не только для элементарной частицы с одной массой покоя, но и для частицы со спектром масс. Например, ток поляризации вакуума внешним электромагнитным полем в первом приближении имеет вид

$$j_\nu(p) = -\frac{e^2}{4\pi^2 i} \int \text{sp} \{ [L^i k_i + \kappa]^{-1} L_\nu [L^l (k_l - p_l) + \kappa]^{-1} L_\mu \} d^4 k A_\mu(p), \quad (15)$$

где полюса обходятся как в работе (5)\*. Очевидно,  $[L^n k_n + \kappa]^{-1}$  — функция Грина в пространстве импульсов — имеет вид

$$(L^n k_n + \kappa)^{-1} = T(-iL^n k_n) (k^2 + \mu_1^2)^{-1} (k^2 + \mu_2^2)^{-1} \dots (k^2 + \mu_s^2)^{-1}. \quad (16)$$

Из (14) следует, что  $(L^n k_n + \kappa)^{-1}$  возрастает при  $k \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $k^{n+2s-1}/k^{2s} = k^{n-1}$ . Таким образом, подинтегральное выражение в (15) возрастает как  $k^{2n-2}$ , что делает  $j_\mu(p)$  расходящимся для частицы с любыми спинами.

В заключение автор пользуется возможностью поблагодарить Е. С. Фрадкина за замечания, сделанные им при чтении рукописи.

Поступило  
20 XI 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> В. Паули, Ф. Вилларс, Сборн. Сдвиг уровней атомных электронов, 1950, <sup>2</sup> И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, ЖЭТФ, 18, 703 (1948). <sup>3</sup> В. И. Карлман, ЖЭТФ, 21, 1338 (1951). <sup>4</sup> Д. Д. Иваненко, В. Григорьев, ЖЭТФ, 21, 563 (1951). <sup>5</sup> R. P. Feynman, Phys. Rev., 76, 769 (1949). <sup>6</sup> Ю. А. Яппа, ДАН, 86, № 1 (1952).

\* Формула (15) получена Фейнманом лишь для электрона. Можно, однако, доказать, что она верна для частицы с произвольным спином.