Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 2

ГИДРАВЛИКА

А. Н. ХОВАНСКИЙ

К ВЫВОДУ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 8 I 1953)

Из закона Дарси получаются следующие выражения для составляющих скорости ламинарной фильтрации по осям x, y, z:

$$w_x = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}; \quad w_y = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial y}; \quad w_z = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial P}{\partial z}. \tag{1}$$

При пренебрежении внешними массовыми и инерционными силами (1) являются уравнениями движения жидкости. Здесь k — коэффициент проницаемости пласта, μ — абсолютный коэффициент вязкости жидкости, P — давление.

Уравнение неразрывности жидкости имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\gamma w_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\gamma w_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\gamma w_z) + \frac{\partial}{\partial t}(m\gamma) = 0, \tag{2}$$

где m — пористость пласта, γ — удельный вес жидкости.

Подставив (1) в (2), получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \frac{\mu}{k}\frac{\partial m\gamma}{\partial t}. \tag{3}$$

Исходя из (3), можно получить дифференциальные уравнения для $m\gamma$, γ, P и m. Но для этого необходимо знать соотношения, связывающие γ и m с P.

Уравнение состояния для однородной изотропной жидкости, подчиняющейся закону Гука, имеет вид

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dP}{K_ж},$$

где $K_ж$ — модуль объемного сжатия жидкости.

Интегрируя это равенство, получим

$$\gamma = \gamma_0 e^{(P-P_0)/K_ж}, \tag{4}$$

где γ_0 — удельный вес жидкости при давлении P_0.

Уравнение состояния для однородного изотропного пласта, подчиняющегося закону Гука, имеет вид

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{dP}{K_с}, \tag{5}$$

где τ — объем пласта, K_c — модуль упругости порового пространства. Но $\tau_п / \tau = m$, где $\tau_п$ — объем порового пространства, т. е. переменная часть пласта. Поэтому

$$dm = \frac{\tau\, d\tau_п - \tau_п\, d\tau}{\tau^2} = \frac{\tau - \tau_п}{\tau} \frac{d\tau}{\tau} = (1 - m) \frac{d\tau}{\tau}, \tag{6}$$

так как $d\tau_п = d\tau$ (т. е. скелет породы предполагается недеформируемым). Подставляя (6) в (5), получим

$$\frac{dm}{1 - m} = \frac{dP}{K_c},$$

откуда

$$m = 1 - (1 - m_0)\, e^{-(P - P_0)/K_c}. \tag{7}$$

Из (7) можно получить приближенное равенство

$$m \approx m_0 + (1 - m_0) \frac{P - P_0}{K_c}.$$

Здесь m_0 — пористость при давлении P_0.

В. Н. Щелкачев ([1]) вместо (6) пользовался соотношением $dm = d\tau_п/\tau$, откуда он получил $m = m_0 + \frac{P - P_0}{K_c}$. Поэтому наши последующие результаты будут отличаться от результатов В. Н. Щелкачева.

Из (4) и (7) следует

$$m\gamma = \gamma_0 \left[e^{(P - P_0)/K_ж} - (1 - m_0)\, e^{\left(\frac{1}{K_ж} - \frac{1}{K_c}\right)(P - P_0)} \right],$$

поэтому

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial m\gamma}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial m\gamma} = \frac{\partial m\gamma}{\partial x} \frac{dP}{dm\gamma}.$$

Имеем

$$\frac{dm\gamma}{dP} = \gamma \left[\frac{1}{K_ж} - (1 - m_0) \left(\frac{1}{K_ж} - \frac{1}{K_c} \right) e^{-(P - P_0)/K_c} \right],$$

откуда (3) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial m\gamma / \partial x}{1 - (1 - m_0)(1 - K_ж / K_c)\, e^{-(P - P_0)/K_c}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial m\gamma / \partial y}{1 - (1 - m_0)(1 - K_ж / K_c)\, e^{-(P - P_0)/K_c}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial m\gamma / \partial z}{1 - (1 - m_0)(1 - K_ж / K_c)\, e^{-(P - P_0)/K_c}} \right] = \frac{\mu}{kK_ж} \frac{\partial m\gamma}{\partial t}.$$

Полагая здесь $e^{-(P - P_0)/K_c} \approx 1$, получим $\varkappa' \nabla^2 m\gamma = \partial m\gamma / \partial t$, где

$$\varkappa' = \frac{kK_ж}{\mu\, [m_0 + (1 - m_0)\, K_ж / K_c]}. \tag{8}$$

В. Н. Щелкачев ([1]), пользуясь своим определением dm, получил

$$\varkappa = \frac{kK_ж}{\mu\, (m_0 + K_ж / K_c)} \tag{9}$$

и назвал $\varkappa$ коэффициентом пьезопроводности.

Маскет ([2]) пользовался для аналогичных целей выражением

$$\varkappa'' = \frac{kK_ж}{\mu m_0}.$$

Заметим, что при $m_0 = 1$ из (8) имеем

$$\lim_{m_0 \to 1} \frac{\varkappa'}{k} = \frac{K_ж}{\mu},$$

т. е. в правой части остается лишь величина, характеризующая жидкость. Из (9) имеем

$$\lim_{m_0 \to 1} \frac{\varkappa}{k} = \frac{K_ж}{\mu(1 + K_ж / K_с)},$$

что физически несообразно, ибо при $m_0 = 1$ пласт целиком заполняется жидкостью.

В табл. 1 для сравнения величин $\varkappa$ и $\varkappa'$ приведены значения $\varkappa' / \varkappa$.

Таблица 1

m_0 \ $K_ж / K_с$	0,25	0,50	0,75	1	2	3
0	1	1	1	1	1	1
0,20	1,125	1,167	1,188	1,200	1,220	1,231
0,40	1,182	1,286	1,353	1,400	1,500	1,545
0,60	1,214	1,375	1,500	1,600	1,857	2,000
0,80	1,235	1,444	1,632	1,800	2,333	2,714
1	1,250	1,500	1,750	2,000	3,000	4,000

Точно так же можно вывести следующее уравнение для γ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\gamma / \partial x}{1 - (1 - m_0)(1 - K_ж / K_с)\, e^{-(P - P_0)/K_с}}\right] \text{[redacted]}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\gamma / \partial y}{1 - (1 - m_0)(1 - K_ж / K_с)\, e^{-(P - P_0)/K_с}}\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\gamma / \partial z}{1 - (1 - m_0)(1 - K_ж / K_с)\, e^{-(P - P_0)/K_с}}\right] = \frac{\mu}{kK_ж}\frac{\partial\gamma}{\partial t}.$$

Отсюда приближенно получим

$$\varkappa' \nabla^2 \gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial t}.$$

Пользуясь теми же соотношениями, можно получить следующее уравнение для P:

$$\frac{k}{\mu K_ж}\,\frac{(\partial P / \partial x)^2 + (\partial P / \partial y)^2 + (\partial P / \partial z)^2 + K_ж \nabla^2 P}{\frac{1}{K_ж} - (1 - m_0)\left(\frac{1}{K_ж} - \frac{1}{K_с}\right) e^{-(P - P_0)/K_с}} = \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Отсюда, полагая $e^{-(P - P_0)/K_с} \approx 1$ и пренебрегая членом $(\partial P / \partial x)^2 + (\partial P / \partial y)^2 + (\partial P / \partial z)^2$, можно получить уравнение $\varkappa' \nabla^2 P = \partial P / \partial t$, широко применяющееся в подземной гидравлике в виде $\varkappa \nabla^2 P = \partial P / \partial t$, но нам не кажется достаточно обоснованным пренебрежение членом $(\partial P / \partial x)^2 + (\partial P / \partial y)^2 + (\partial P / \partial z)^2$.

В заключение укажем, что, пользуясь тем же методом, можно получить уравнение для m:

$$\frac{K_с / K_ж + 1}{1 - m}\left[\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial z}\right)^2\right] + \nabla^2 m =$$

$$= \frac{\mu}{kK_с}\left(\frac{K_с}{K_ж} m + 1 - m\right)\frac{\partial m}{\partial t},$$

которое мы не встречали в известной нам литературе.

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР

Поступило
24 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Щелкачев, ДАН, 52, № 2 (1946). [2] М. Маскет, Течение однородных жидкостей в пористой среде, 1949.