Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 2

ГИДРАВЛИКА

Г. С. САЛЕХОВ и Н. Ф. ИВАНОВ

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕЖИМЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ НЕФТЯНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 6 I 1953)

Вопрос об оптимальном режиме эксплуатации нефтяных скважин для случая упругого режима и постоянного дебита был рассмотрен В. Н. Щелкачевым [1]. В настоящей работе этот вопрос изучается с точки зрения выбора закона изменения дебита в зависимости от определенных практических условий, накладываемых на забойное давление.

Пусть эксплуатационная скважина радиуса a расположена в однородном горизонтальном пласте мощности h и с проницаемостью k, заполненном жидкостью вязкости μ.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть заранее известны давления, ниже которых, в силу определенных условий эксплуатации, нельзя допускать падения давления. Наибольшее из этих давлений назовем $P_{кр}$. Например, из двух условий — не допускать разгазирования в пласте и обеспечить фонтанный способ эксплуатации, известны давление разгазирования $P_{разг}$ и давление фонтанирования $P_{фонт}$. При $P_{разг} > P_{фонт}$ считаем $P_{кр} = P_{разг}$; при $P_{фонт} > P_{разг}$ полагаем $P_{кр} = P_{фонт}$. Требуется определить, с каким дебитом эксплуатировать скважину, чтобы не снижая давление на ее забое ниже $P_{кр}$, получить за данное время ее эксплуатации t максимальную суммарную добычу.

Пусть скважина эксплуатируется с дебитом $Q(\tau)$ за данное время t. На основании известной формулы [2] давление на забое скважины при упругом режиме запишется:

$$P(a,\ t) = P(a,\ 0) - \frac{\mu}{4\pi kh}\int\limits_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau} e^{-a^2/4\varkappa(t-\tau)} d\tau, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности.

$Q(\tau)$ должно быть таким, чтобы $P(a,\ t) \geqslant P_{кр}$.

Рассмотрим эксплуатацию скважины с таким дебитом $\overline{Q}(\tau)$, чтобы удовлетворялись неравенства

$$P_{кр} \leqslant \overline{P}(a,\ t) = P(a,\ 0) - \frac{\mu}{4\pi kh}\int\limits_0^t \frac{\overline{Q}(\tau)}{t-\tau} e^{-a^2/4\varkappa(t-\tau)}\, d\tau \leqslant P(a,\ t) \tag{2}$$

во все время эксплуатации t. Покажем, что суммарная добыча будет больше при эксплуатации скважины с дебитом $\overline{Q}(\tau)$.

Математическая формулировка приобретает при этом следующий вид:

Дано

$$\int_0^t \frac{\overline{Q}(\tau)}{t-\tau} e^{-a^2/4\varkappa(t-\tau)} d\tau \geqslant \int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau} e^{-a^2/4\varkappa(t-\tau)} d\tau, \tag{3}$$

$$\overline{Q}(\tau) \geqslant 0, \quad Q(\tau) \geqslant 0.$$

Доказать:

$$\int_0^t \overline{Q}(\tau)\, d\tau \geqslant \int_0^t Q(\tau)\, d\tau. \tag{4}$$

Для доказательства разобьем время эксплуатации t на n равных интервалов; n выбираем равным целой части дроби $2\varkappa t/a^2$, где $a^2/2\varkappa \approx 0{,}005$ сек. при $a = 10$ см, $\varkappa = 10^4$ см²/сек; тогда $t/n \approx a^2/2\varkappa = 0{,}005$ сек. Так как каждый интервал очень мал, то практически с хорошей степенью точности можно функции $\overline{Q}(\tau)$ и $Q(\tau)$ рассматривать как ступенчатые функции внутри каждого интервала $((i-1)\,t/n,\ it/n)$, т. е.

$$\overline{Q}\left(\frac{it}{n}\right) = \overline{Q}_i, \quad Q\left(\frac{it}{n}\right) = Q_i, \quad \frac{i-1}{n}\,t < \tau < \frac{it}{n}. \tag{5}$$

Неравенство (4) равносильно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{Q}_i \frac{t}{n} \geqslant \sum_{i=1}^{n} Q_i \frac{t}{n}.$$

Тем самым задача сводится к исследованию следующей системы алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{i} \overline{Q}_k \int_{\frac{k-1}{n}t}^{\frac{k}{n}t} \frac{e^{-\frac{a^2}{4\varkappa(it/n-\tau)}}}{it/n-\tau}\, d\tau = \overline{c}_i, \qquad \text{где } \overline{c}_i = \frac{P(a,0) - \overline{P}(a, it/n)}{\mu}\, 4\pi k h \tag{6}$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

Заметим далее, что

$$\int_{\frac{k-1}{n}t}^{\frac{k}{n}t} \frac{e^{-\frac{a^2}{4\varkappa(it/n-\tau)}}}{it/n-\tau}\, d\tau = -\operatorname{Ei}\left[-\frac{na^2}{4\varkappa(i-k+1)\,t}\right] - \left\{-\operatorname{Ei}\left[-\frac{na^2}{4\varkappa(i-k)\,t}\right]\right\} \equiv A_{ki}.$$

Из определения A_{ki} следует тождество

$$A_{ki} = A_{pq}, \quad \text{если } i - k = q - p;$$

поэтому мы можем ввести обозначения

$$A_{ki} = a_m, \quad m = i - k + 1.$$

Рассмотрим теперь вторую систему

$$\sum_{k=1}^{i} a_{i-k+1} Q_k = c_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7}$$

где $0 \leqslant c_i \leqslant \bar{c}_i$ по условию (из неравенств (3)). При решении этой системы применяется следующая лемма *:

При $a_{ik} \geqslant 0$, $a > 0$ *имеет место неравенство*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -a & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & -a & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & -a & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \ldots & -a \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Решая системы (6) и (7), находим

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{Q}_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} Q_i.$$

Тем самым при наших допущениях утверждение (4) доказано.

Это позволяет сделать следующее заключение: чем меньше забойное давление будет отличаться от критического за все время эксплуатации, тем большее суммарное количество жидкости получим за это время.

В. Н. Щелкачев ([1]) указал, что при эксплуатации пласта одной скважиной с постоянным дебитом давление с погрешностью, не превышающей 1%, изменяется по одному и тому же закону для бесконечного и конечного пластов, если $r_0 \geqslant 10^5 a$, $\mathrm{Fo} \leqslant 1/2$, где r_0 — радиус пласта, а $\mathrm{Fo} = \frac{\varkappa}{r_0^2} t$.

При помощи теоремы о среднем легко доказать, что тот же закон изменения давления с той же погрешностью имеет место и при эксплуатации конечного пласта одной скважиной с переменным дебитом. Тем самым наше утверждение справедливо и для конечных пластов при выполнении условий $r_0 \geqslant 10^5 a$, $\mathrm{Fo} \leqslant 1/2$.

Из формулы Дюпюи следует, что наше утверждение справедливо и для конечных пластов, эксплуатируемых одной скважиной при стационарном режиме.

Нами также доказано, что максимальное количество жидкости скважина за определенное время дает при эксплуатации месторождения с постоянным давлением на забое, равным критическому, независимо как от всей предшествующей истории эксплуатации месторождения в целом, так и от одновременной эксплуатации другими скважинами. В силу термо-гидродинамической аналогии подобное утверждение можно высказать для соответствующей задачи теории теплопроводности

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР

Поступило
24 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Н. Щелкачев, Упругий режим пластовых водонапорных систем, 1948.
[2] В. Н. Щелкачев, ДАН, 52, № 5, 399 (1946).

* Эта лемма сформулирована и доказана Т. А. Кокаревой.