14. Spohn, H. Dynamics of Charged Particles and their Radiation Field. – Cambridge : Cambridge University Press, 2004. – 380 p.

15. Shen, C.S. Magnetic Bremsstrahlung in an Intense Magnetic Field // Physical Review. D. – 1972. – Vol. 6, № 10. – P. 2736–2754.

16. Lieu, R. Synchrotron radiation reaction / R. Lieu // Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1987. – Vol. 20, № 9. – P. 2405–2413.

17. Гинзбург, В.Л. Теоретическая физика и астрофизика: Дополнительные главы. – Изд. 4. – М. : Издательская группа URSS, 2020. – 488 с.

УДК 539.12

В.Ю. Гавриш[1], В.В. Андреев[2]

[1]Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого

[2]Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

ПАРАМЕТРЫ ПУАНКАРЕ-КОВАРИАНТНОЙ КВАРКОВОЙ МОДЕЛИ МЕЗОНОВ ТЯЖЕЛОГО СЕКТОРА

В работе представлена методика описания мезонов с одним тяжелым кварком в модели, основанной на точечной форме Пуанкаре-инвариантной квантовой механики. Развитый формализм использован для оценки массы c–кварка и β –параметра волновой функции псевдоскалярного $D^{\pm}$– мезона. Показано, что использование кварк-антикваркового потенциала, константы распада $P(q\bar{Q}) \to \ell \nu_{\ell}$ приводит к сопоставимым с другими подходами значениям массы m_c.

Ключевые слова: кварк, точечная форма, кварк-антикварковый потенциал, $D^{\pm}$– мезон.

Введение. Расчет наблюдаемых электрослабых характеристик связанных кварковых систем является нетривиальной задачей физики элементарных частиц. Для мезонов легкого сектора объем высокоточных экспериментальных данных дает возможность проводить вычисление параметров моделей с использованием наблюдаемых псевдоскалярных и векторных $\pi^{\pm}-,\pi^{0}-$, $K^{\pm}-,\eta-$, η'–мезонов [1]. Для мезонов тяжелого сектора объем экспериментальных данных значительно меньше, что привело к использованию альтернативных подходов, в том числе основанных на КХД-мотивированных потенциалах, для описания спектра масс тяжелых $D-$, D_S-, $B-$, η_c- и $J/\psi-$ мезонов.

В работе представлена методика расчета масс конституентных кварков в модели, основанной на составной кварковой модели и на точечной форме Пуанкаре-инвариантной квантовой механики (далее ПиКМ) [2]. Указанная форма ПиКМ наиболее естественным образом обобщается для описания связанных кварк-антикварковых систем, поскольку оператор 4-ре скорости $V^{\mu}=\{V_0,V_{\mathbf{Q}}\}$ без взаимодействия и с ним совпадают. В ходе работы авторами из условия соответствия массы $D^{\pm}\left(cd\right)$–мезона и константы распада $D^{\pm}\left(cd\right)\to \ell^{\pm}\nu_{\ell}$ получены значения параметров развиваемой модели.

Расчет выполнен для различных видов волновых функций. По результатам проведен сравнительный анализ полученных значений: показано, что использование КХД-мотивированного потенциала [3] и феноменологической константы $\alpha_s\left(q^2\right)$ приводит к значениям для массы конституентного c –кварка, сопоставимым с другими подходами и моделями.

Описание модели. Ниже определим вектор состояния мезона массы M, импульсом $Q^{\mu}=\left\{\omega_M\left(\mathbf{Q}\right),\mathbf{Q}\right\}$ и спином $J\,\mu$ в точечной форме ПиКМ. В развиваемом подходе вектор состояния мезона определим с использованием базиса прямого произведения двухчастичного представления $\left|\mathbf{p}_1,\lambda_1,a,\mathbf{p}_2,\lambda_2,b\right\rangle$ кварков с массами m_q, $m_{\bar{Q}}$, импульсами $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, проекциями спинов λ_1, λ_2 и цветовыми квантовыми числами a и b соответственно как [3]

$$\begin{gathered}\left|\mathbf{Q},J\mu,M\right\rangle=\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{\nu_1,\nu_2}\int d\mathbf{k}\;\Phi^J_{\ell S}(\mathbf{k},\beta_{q\bar{Q}})\Omega\begin{pmatrix}\ell & S & J\\ \nu_1 & \nu_2 & \mu\end{pmatrix}(\theta_{\mathrm{k}},\phi_{\mathrm{k}})\times\\ \times\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(\mathbf{p}_1)\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{p}_2)}{\omega_{m_q}(\mathbf{k})\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})V_0}}\;D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}(\mathbf{n}_{W_1})\,D^{1/2}_{\lambda_2,\nu_2}(\mathbf{n}_{W_2})\left|\mathbf{p}_1,\lambda_1,a,\mathbf{p}_2,\lambda_2,b\right\rangle.\end{gathered}\tag{1}$$

В выражении (1) использовано обозначение $\omega_m(\mathbf{p})=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$ совместно с относительным импульсом относительного движения кварков $\mathbf{k}$ [3,4] и 4-скоростью мезона $V^{\mu}=Q^{\mu}M$. Для краткости в (1) введены функции

$$\Omega\begin{pmatrix}\ell & S & J\\ \nu_1 & \nu_2 & \mu\end{pmatrix}(\theta_{\mathrm{k}},\phi_{\mathrm{k}})=Y_{\ell m}\left(\theta_{\mathrm{k}},\phi_{\mathrm{k}}\right)\,C\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & S\\ \nu_1 & \nu_2 & \mu\end{pmatrix}\,C\begin{pmatrix}\ell & S & J\\ m & \lambda & \mu\end{pmatrix},$$

где $Y_{\ell m}\left(\theta_{\mathrm{k}},\phi_{\mathrm{k}}\right)$ – сферические функции определяемые углами вектора $\mathbf{k}$, $C\begin{pmatrix}s_1 & s_2 & S\\ \nu_1 & \nu_2 & \mu\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}\ell & S & J\\ m & \lambda & \mu\end{pmatrix}$ – коэффициенты Клебша-Гордана группы *SU(2),* $D^{1/2}_{\lambda,\nu}(\mathbf{n}_W)$ – функции вращения Вигнера вектор параметра $\mathbf{n}_W$ [4]. Волновая функция мезона $\Phi^J_{\ell S}(\mathbf{k},\beta_{q\bar{Q}})$ в (1) нормируется условием

$$\sum_{\ell,S}\int d\mathrm{k}\;\mathrm{k}^2\;\left|\Phi^J_{\ell S}(\mathrm{k},\beta_{q\bar{Q}})\right|^2=\mathrm{I},\qquad \mathrm{k}=|\mathbf{k}|\,.\tag{2}$$

Параметры развиваемой модели определим с использованием интегрального представления лептонной константы распада псевдоскалярного мезона $P^{\pm}(q\bar{Q})\to\ell^{\pm}\nu_{\ell}$ [5, 6]

$$f_I(m_q,m_{\bar{Q}},\beta^P_{q\bar{Q}})=\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{\pi}\int d\mathrm{k}\;\mathrm{k}^2\;\Phi(\mathrm{k},\beta^P_{q\bar{Q}})\sqrt{\frac{W^+_{m_q}(\mathbf{k})W^+_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}{M_0\;\omega_{m_q}(\mathbf{k})\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}}\left(1-\frac{\mathrm{k}^2}{W^+_{m_q}(\mathbf{k})W^+_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})}\right),\tag{3}$$

где

$$W^{\pm}_m(\mathbf{k})=\omega_m(\mathbf{k})\pm m,\;M_0=\omega_{m_q}(\mathbf{k})+\omega_{m_{\bar{Q}}}(\mathbf{k})\,.\tag{4}$$

Для мезонов с одним тяжелым кварком потенциал определим как [3]

$$\hat{V}_{q\bar{Q}}(\mathrm{r}) = \hat{V}_{coul.}(\mathrm{r}) + \hat{V}_{\mathrm{lin.}}(\mathrm{r}) + \hat{V}_{S\bar{S}}(\mathrm{r}), \tag{5}$$

с кулоновской (*coul.*), спин-спиновой ($S\bar{S}$) и запирающей (*lin.*) частями [5]

$$\hat{V}_{coul.}(\mathrm{r}) = -\frac{4}{3\,\mathrm{r}} \sum_{i=1}^{7} \alpha_i \;\mathrm{erf}\left(\tau_i\;\mathrm{r}\right),$$

$$\hat{V}_{S\bar{S}}(\mathrm{r}) = -\frac{32\left(S\bar{S}\right)}{9\sqrt{\pi}\; m_q\; m_{\bar{Q}}} \sum_{i=1}^{7} \alpha_i\;\tau_i^3\;\exp\left[-\tau_i^2\;\mathrm{r}^2\right],$$

$$\hat{V}_{lin.}(\mathrm{r}) = \sigma\;\mathrm{r}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\exp\left[-b^2\mathrm{r}^2\right]}{b\;\mathrm{r}} + \left(1 + \frac{1}{2\,b^2\;\mathrm{r}^2}\right)\mathrm{erf}\left(b\;\mathrm{r}\right)\right) + w_0, \tag{6}$$

где $\mathrm{erf(x)}$ – функция ошибок, σ – параметр линейной части, значение которого выберем $\sigma = 0{,}19 \pm 0{,}01$ ГэВ^2 [5; 6], а константа w_0 определяет ненулевые значения глюонных и кварковых конденсатов. Отметим, что выражения (6) были получены путем процедуры «размазки» с параметром b [7] и параметризацией бегущей константы сильного взаимодействия [7–9]

$$\alpha_s\left(q^2\right) = \sum_{i=1}^{7} \alpha_i \exp\left[-q^2 / 4\gamma_i^2\right], \tag{7}$$

с критическим значением $\alpha_s\left(q^2 = 0\right) = 0{,}692$. Также для краткости в (6) определена величина $\tau_i = b\;\gamma_i \Big/ \sqrt{b^2 + \gamma_i^2}$.

Приведенные в разделе соотношения позволяют проводить расчет массы псевдоскалярного мезона из выражения

$$M(m_q, m_{\bar{Q}}, \beta^P_{q\bar{Q}}) = \left\langle \psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\middle|\hat{M}_0\middle|\psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\right\rangle + \left\langle \psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\middle|\hat{V}_{q\bar{Q}}\middle|\psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\right\rangle, \tag{8}$$

где $\hat{M}_0$ – оператор кинетической энергии, определяемый с использованием массы кварков

$$\left\langle \psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\middle|\hat{M}_0\middle|\psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\right\rangle = \left\langle \psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\middle|\hat{T}_{m_q}\middle|\psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\right\rangle + \left\langle \psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\middle|\hat{T}_{m_{\bar{Q}}}\middle|\psi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)\right\rangle. \tag{9}$$

Ниже обобщим методику расчета на случай псевдоскалярного $D^{\pm}$ – мезона.

Расчет массы c-кварка. Для прикладных расчетов волновая функция мезона может быть выбрана в виде [10–12]

$$\Phi^{osc.}(\mathrm{k}, \beta^P_{q\bar{Q}}) = N_{osc.}\exp\left[-\frac{\mathrm{k}^2}{2\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)^2}\right], \quad N_{osc.} = \frac{2}{\pi^{1/4}\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)^{3/2}}, \tag{10}$$

$$\Phi^{coul.}(\mathrm{k}, \beta^P_{q\bar{Q}}) = \frac{N_{coul.}}{\left(1 + \left(\mathrm{k}\big/\beta^P_{q\bar{Q}}\right)^2\right)^2}, \qquad N_{coul.} = 4\sqrt{\frac{2}{\pi\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)^3}}, \tag{11}$$

$$\Phi^{pl.}(\mathrm{k}, \beta^P_{q\bar{Q}}) = \frac{N_{pl.}}{\left(1 + \left(\mathrm{k}\big/\beta^P_{q\bar{Q}}\right)^2\right)^3}, \qquad N_{pl.} = 16\sqrt{\frac{2}{7\,\pi\,\left(\beta^P_{q\bar{Q}}\right)^3}}. \tag{12}$$

с советующими индексами для осцилляторной (*osc.*), кулоновской (*coul.*) и степенной (*pl.*) волновой функции [10]. Расчеты проведем с использованием экспериментальных значений массы $D^{\pm}$– мезона и константы распада $D\pm(cd)\to\ell\nu_{\ell}$ [1]

$$M_{D^{\pm}}=1869,66\pm0,05\ \text{МэВ},\ \ f_{D^{\pm}}=209,78\pm6,79\ \text{МэВ}. \tag{13}$$

Используя параметры развиваемой модели, полученные с использованием тождества Уорда $\left(\hat{m}_q+\hat{m}_Q\right)g_{P^{\pm}}=M^2_{P^{\pm}}f_{P\pm}$, где $\hat{m}_q,\hat{m}_Q$ – токовые массы кварков [1] и $g_{P^{\pm}}$ – константа псевдоскалярной плотности [11]

$$m_u=\left(219,48\pm9,60\right)\ \text{МэВ},\ m_d=\left(221,98\pm9,60\right)\ \text{МэВ}, \tag{14}$$

а также выражения (3)–(12), совместно с экспериментальными значениями (13) и параметрами модели (14), получаем следующие значения массы c-кварка в зависимости от выбора волновой функции (таблица 1).

Таблица 1 – Значения массы c-кварка для различных видов волновых функций

Вид волновой функции	Масса c-кварка, МэВ	Значение β -параметра, МэВ
osc. (10)	$1961,37\pm12,70$	$480,56\pm12,70$
coul. (11)	$1588,98\pm12,70$	$497,04\pm12,70$
pl. (12)	–	–

Отметим, что расчеты значений проводились из условия требования минимума функционала

$$\chi^2=\left(\frac{M(m_c,m_{\bar{d}},\beta^P_{c\bar{d}})-M_{D^{\pm}}}{\Delta M_{D^{\pm}}}\right)^2+\left(\frac{f_I(m_c,m_{\bar{d}},\beta^P_{c\bar{d}})-f_{D^{\pm}}}{\Delta f_{D^{\pm}}}\right)^2. \tag{15}$$

Из таблицы 1 следует, что кулоновская (*coul.*) волновая функция приводит к рациональным результатам в сравнении с массой $D^{\pm}$– мезона (13).

Ниже проведем сравнение результатов развитой модели с другими подходами, в том числе основанными на релятивистских кварковых моделях (таблица 2).

Таблица 2 – Сопоставление параметров модели $m_u+m_d=440$

Модель	Масса u -кварка, МэВ	Масса d -кварка, МэВ	Масса c-кварка, МэВ
Релятивизированная кварковая модель [7]	$m_u+m_d=440$		1628
Динамика на световом фронте [12]	250	250	1445
Квазипотенциальный подход [13]	330	330	1550
Динамика на световом фронте [14,15]	220	220	1800
Эта работа	$219,48\pm9,60$	$221,98\pm9,60$	$1588,98\pm12,70$

Анализ таблицы 2 показывает, что предложенная методика расчета конституентных масс кварков в модели, основанной на точечной форме ПиКМ, приводит к удовлетворительным результатам в сравнении с другими подходами и моделями.

Заключение. В работе изложена методика расчета параметров модели, основанной на составной кварковой модели и на точечной форме ПиКМ. Авторами кратко изложены базовые соотношения, а также приведены выражения для потенциала кварк-антикваркового взаимодействия. Предложенный алгоритм использован для вычисления значения массы конституентного c-кварка из условия соответствия теоретических расчетов с экспериментальными данными. Сравнительный анализ показал, что развитая модель приводит к коррелирующим с другими подходами значениям.

Список использованных источников

1. Review of Particle Physics / S. Navas [et al.] (PDG group) // Phys. Rev. D. – 2024. – Vol. 110 – P. 030001.

2. Polyzou, W.N. Mini review of Poincaré invariant quantum theory / W.N. Polyzou, Y. Huang, Ch. Elster [et al.] // Few Body Syst. – 2011. – Vol. 49. – P. 129–147.

3. Andreev, V.V. Nonperturbative region of effective strong coupling / V.V. Andreev // arXiv: 1305.4266 – 2013.

4. Keister, B.D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Adv. Nucl. Phys. – 1991. – Vol. 20. – P. 225–279.

5. Ebert, D. Quark – anti-quark potential with retardation and radiative contributions and the heavy quarkonium mass spectra / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // Phys. Rev. D. – 2000. – Vol. 62. – P. 034014.

6. Kalashnikova, Yu.S. QCD string in light – light and heavy – light mesons / Yu.S. Kalashnikova, A.V. Nefediev, Yu.A. Simonov // Phys. Rev. D. – 2001. – Vol .64. – P. 014037.

7. Godfrey, S. Mesons in a relativized quark model with chromodynamics / S. Godfrey, N. Isgur // Phys. Rev. D. – 1985. – Vol. 32. – P. 189–231.

8. Deur, A. The QCD running coupling / A. Deur // JLAB-PHY-24-4226. – 2025. – 20 p.

9. Barnes, T. Higher charmonia / T. Barnes, S. Godfrey, E.S. Swanson // Phys. Rev. D. – 2005. – Vol. 72. – P. 054026.

10. Krutov, A.F. Magnetic moment of the $\rho-$meson in instant-form relativistic quantum mechanics / A.F. Krutov, R.G. Polezhaev, V.E. Troitsky // Phys. Rev. D. – 2018. – Vol. 97. – P. 033007.

11. Andreev, V.V. Constituent quark masses in Poincaré-invariant quantum mechanics / V.V. Andreev, V.Yu. Haurysh // J. Phys. Conf. Ser. – 2017. – Vol. 938. – P. 012030.

12. Jaus, W. Semileptonic, radiative, and pionic decays of B, B^* and D, D^* mesons / W. Jaus // Phys. Rev. D. – 2001. – Vol. 53. – P. 1349–1365.

13. Ebert, D. Strong decays of vector mesons to pseudoscalar mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // Physics Letters B. – 2015. – Vol. 744. – P. 1–6.

14. Ryu, H.-Y. Systematic twist expansion of $\eta_c, \eta_b \to \gamma^* \gamma$ transition form factors in light-front quark model // H.-Y. Ryu, H.-M. Choi, Ji, Ch.-R. Ji // Phys. Rev. D. – 2018. – Vol. 98. – P. 034018.

15. Choi, H.-M. Spacelike and timelike form factors for the $(\pi^0, \eta, \eta') \to \gamma^* \gamma$ transitions in the light-front quark model / H.-M. Choi, H.-Y. Ryu, Ch.-R. Ji // Phys. Rev. D. – 2017. – Vol. 96. – P. 056008.