Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

М. Д. РОЗЕНБЕРГ

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, ИМЕЮЩЕЙ ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 17 I 1953)

В теории фильтрации встречаются частные случаи следующей нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{l_{ij}}}{\partial x^{l_{ij}}}\left[x^{m_j} f_{ij}(u_1, \ldots, u_n)\left(\frac{\partial^{s_{ij}} u_i}{\partial x^{s_{ij}}}\right)^{\varkappa_{ij}}\right]=$$

$$= x^{m_j}\left[\frac{\partial}{\partial t}\varphi_j(u_1, u_2, \ldots, u_n)\right]^{\sigma_j}, \quad j=1, \ldots, n. \tag{1}$$

В случае, когда $\frac{\sigma_j}{\varkappa_{ij}s_{ij}+l_{ij}}=\mathrm{const}$, $i, j=1, 2, \ldots, n$, система (1) может быть приведена к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Введем следующее преобразование:

$$\eta = xt^{-\alpha}, \tag{2}$$

где

$$\alpha = \frac{\sigma_j}{k_{ij}s_{ij}+l_{ij}}.$$

Частные случаи преобразования (2) применялись Л. С. Лейбензоном ([1]) для сведения к обыкновенному дифференциальному уравнению нелинейного уравнения в частных производных турбулентного движения газа в пористой среде и П. Я. Полубариновой-Кочиной ([2]) для сведения к обыкновенному дифференциальному уравнению нелинейного дифференциального уравнения в частных производных фильтрации грунтовых вод.

Применяя преобразование (2) к системе (1), получим в результате следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d^{l_{ij}}}{d\eta^{l_{ij}}}\left[\eta^{m_j} f_{ij}(u_1, \ldots, u_n)\left[\frac{d^{s_{ij}}}{d\eta^{s_{ij}}}\right]^{\varkappa_{ij}}\right]=$$

$$=(-\alpha)^{\sigma_j}\eta^{m_j+\sigma_j}\left[\frac{d\varphi_j(u_1, \ldots, u_n)}{d\eta}\right]^{\sigma_j}, \quad j=1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Уравнения фильтрации газированной нефти в пористой среде при степенном законе фильтрации с показателем $\varkappa$ являются частным случаем системы (1).

Введем следующие обозначения: f — пористость среды; ρ — насыщенность порового пространства раствором; k — проницаемость; $\mu_ж$ — абсолютная вязкость жидкости; $\mu_г$ — абсолютная вязкость газа; $s(p)$ — вес газа, растворенного в единице жидкости; $\beta(p)$ — изменение единицы объема жидкости при растворении в ней газа; $\gamma_г(p)$ — удельный вес газа; $\gamma_н(p)$ — удельный вес нефти; $F_г$ — фазовая проницаемость для газа; $F_н$ — фазовая проницаемость для нефти.

До сих пор принималось, что $F_г$ и $F_н$ являются функциями от одной лишь насыщенности ρ. Наши дальнейшие рассуждения будут справедливы как для этого случая, так и для случая, когда $F_ж$ и $F_г$ зависят также и от давления.

Полагая в уравнении (1) $l_{ij}=1$, $s_{ij}=1$, $n=2$, $u_1=p$, $u_2=\rho$, $m_j=m$,

$$
\begin{gathered}
f_{11}(p,\rho)=c\,[F_г(\rho)]^{\frac{3\varkappa-1}{2}}\,\mu_г(p)^{1-\varkappa}\,[\gamma_г(p)]^{\varkappa}+\\
+c\,\frac{[F_н(\rho)]^{\frac{3\varkappa-1}{2}}\,\mu_н^{1-2\varkappa}\,[\gamma_н(p)]^{\varkappa-1}s(p)}{\beta(p)}=\Phi_1(p,\rho);\\
f_{12}\equiv 0;\\
f_{21}=\frac{c\,[F_н(\rho)]^{\frac{3\varkappa-1}{2}}\,[\mu_н(p)]^{1-2\varkappa}\,[\gamma_н(p)]^{\varkappa-1}}{\beta(p)}=\Phi_2(p,\rho);\\
f_{22}\equiv 0,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где c — константа, зависящая от свойств нефтяного пласта,

$$
\begin{gathered}
\varphi_1=\frac{f}{k_0}\left[\gamma_г(p)(1-\rho)+\frac{s(p)}{\beta(p)}\rho\right],\\
\varphi_2=\frac{f}{k_0}\frac{\rho}{\beta(p)}.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

получим уравнения фильтрации газированной нефти в следующем виде:

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[x^m\Phi_j(p,\rho)\left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]^{\varkappa}\right]=x^m\frac{\partial\varphi_j(p,\rho)}{\partial t},\quad j=1,\,2,
\tag{6}
$$

где m может быть равным 0, 1, 2. При $m=0$ получим одномерную фильтрацию; при $m=1$ — плоско-радиальную фильтрацию и при $m=2$ — сферически-радиальную.

Случай $\varkappa=1$ соответствует линейному закону фильтрации.

Насколько нам известно, в литературе рассматривалась лишь фильтрация при линейном законе [3], причем какие-либо решения системы (6) для неустановившегося течения жидкости отсутствовали.

Представляет практический интерес рассмотрение системы (6) при граничных условиях:

$$\text{при } x=0 \qquad p=p_с;$$

и начальных условиях:

$$\text{при } t=0 \qquad p=p_0,\quad \rho=\rho_0.$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая системе (6), получится из (3) в виде

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta^m \Phi_j(p, \rho)\left[\frac{dp}{d\eta}\right]^{\varkappa}\right] = -\frac{1}{\varkappa+1}\eta^{m+1}\frac{d\varphi_i(p, \rho)}{d\eta}, \quad j = 1, 2$$

при граничных условиях

$$\text{при } \eta = 0 \quad p = p_c; \qquad \text{при } \eta = \infty \quad p = p_0, \ \rho = \rho_0.$$

Уравнения движения трехфазной смеси нефть — вода — газ в пористой среде также являются частным случаем системы (1).

Полагая в ней $l_{ij} = 1$, $s_{ij} = 1$, $n = 3$, $u_1 = p$, $u_2 = \rho_н$, $u_3 = \rho_в$:

$$f_{11}(p, \rho_н, \rho_в) = c\,[F_г(\rho_н, \rho_в)]^{\frac{3\varkappa-1}{2}}[\mu_г(p)]^{1-2\varkappa}[\gamma_г(p)]^{\varkappa} +$$

$$+ c\frac{[F_н(\rho_н, \rho_в)]^{\frac{3\varkappa-1}{2}}[\mu_н(p)]^{1-2\varkappa}[\gamma_н(p)]^{\varkappa-1}s_н(p)}{\beta_н(p)} +$$

$$+ c\frac{[F_в(\rho_н, \rho_в)]^{\frac{3\varkappa-1}{2}}[\mu_в(p)]^{1-2\varkappa}[\gamma_в(p)]^{\varkappa-1}s_в(p)}{\beta_в(p)} = \psi(p, \rho_н, \rho_в);$$

$$f_{12} = f_{13} \equiv 0;$$

$$f_{21}(p, \rho_н, \rho_в) = c\frac{[F_н(\rho_н, \rho_в)]^{\frac{3\varkappa-1}{2}}[\mu_н(p)]^{1-2\varkappa}[\gamma_н(p)]^{\varkappa-1}}{\beta_н(p)} = \psi_2(p, \rho_н, \rho_в);$$

$$f_{22} = f_{23} \equiv 0; \tag{7}$$

$$f_{31}(p, \rho_н, \rho_в) = c\frac{[F_в(\rho_н, \rho_в)]^{\frac{3\varkappa-1}{2}}[\mu_в(p)]^{1-2\varkappa}[\gamma_в(p)]^{\varkappa-1}}{\beta_в(p)} = \psi_3(p, \rho_н, \rho_в);$$

$$f_{32} = f_{33} \equiv 0;$$

$$\varphi_1(p, \rho_н, \rho_в) = \frac{f}{k}\left[\frac{s_н(p)\rho_н}{\beta_н(p)} + \frac{s_в(p)\rho_в}{\beta_в(p)} + \gamma_г(p)(1 - \rho_н - \rho_в)\right],$$

$$\varphi_2(p, \rho_н, \rho_в) = \frac{f}{k_0}\frac{\rho_н}{\beta_н};$$

$$\varphi_3(p, \rho_н, \rho_в) = \frac{m}{k}\frac{\rho_в}{\beta_в(p)},$$

где обозначения те же, что и прежде, а индексы «н» и «в» указывают на принадлежность величин к нефти и воде, получим уравнения движения трехфазной смеси в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^m \psi_j(p, \rho_н, \rho_в)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{\varkappa}\right] = x^m\frac{\partial \varphi_j(p, \rho_н, \rho_в)}{\partial t}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{8}$$

где, как и прежде, m может быть равно 0, 1, 2.

Насколько нам известно, задача в такой постановке рассматривается впервые.

Представляет интерес решение системы при граничных условиях

$$\text{при } x = 0 \qquad p = p_с$$

и начальных условиях

$$\text{при } t = 0 \qquad p = p_0, \quad \rho_н = \rho_{н0}, \quad \rho_в = \rho_{в0}.$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая системе (7), получится из (3) в виде

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta^m \psi_j(p, \rho_н, \rho_в)\left(\frac{dp}{d\eta}\right)^{\varkappa}\right] = -\frac{1}{\varkappa+1}\eta^{m+1}\frac{d\varphi_j(p, \rho_н, \rho_в)}{d\eta}, \quad j = 1, 2, 3 \qquad (9)$$

с граничными условиями

$$\text{при } \eta = 0 \quad p = p_с; \qquad \text{при } \eta = \infty \quad p = p_0, \quad \rho_н = \rho_{н0}, \quad \rho_в = \rho_{в0}.$$

Поступило
18 VI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Лейбензон, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 9, № 1 (1945). [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, ДАН, 58, № 6 (1948). [3] С. А. Христианович, Прикладн. матем. и мех., 5, в. 2 (1941).