Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 2

МЕХАНИКА

Действительный член Болгарской Академии наук И. ЦЕНОВ

О НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ И О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЯХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 12 I 1953)

Допустим, что мы имеем некоторую неголономную механическую систему, геометрическая конфигурация которой определяется s обобщенными координатами; эти координаты мы разделим на две группы:

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_\alpha,\ \ldots,\ q_k, \tag{1}$$

которую мы сокращенно обозначим через $[q_\alpha]$, и

$$q_{k+1},\ q_{k+2},\ \ldots,\ q_i,\ \ldots,\ q_s, \tag{2}$$

которую обозначим через $[q_i]$.

В предыдущей нашей статье (1) мы изложили новую форму уравнений движения механических систем, в частности для системы с линейными неголономными связями уравнения движения имеют вид:

$$\frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_\alpha} = P_\alpha \quad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{3}$$

где R_l получается из $R = {}^1/_2\,(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0)$ путем замены вторых производных от зависимых координат $[q_i]$ через вторые производные от независимых $[q_\alpha]$ при помощи уравнений неголономных связей

$$\dot{q}_i = a_{i\alpha}\dot{q}_\alpha + a_i. \tag{4}$$

Обозначим через $\overline{T}$ результат исключения из первоначальной живой системы T зависимых скоростей $[\dot{q}_i]$ через независимые $[\dot{q}_\alpha]$ посредством уравнений неголономных связей. Найдем тот добавочный член, который следует добавить к лагранжиану от $\overline{T}$, чтобы уравнения (3) были тождественны с уравнениями вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + D_\alpha = P_\alpha, \tag{5}$$

т. е. найдем разность

$$D_\alpha = \frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_\alpha} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha}\right). \tag{6}$$

Проделав соответствующие вычисления, причем в выражениях функций R и R_l мы везде удерживаем только те члены, которые содержат вторые производные от координат, мы получим:

$$D_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{l\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} a_{l\alpha}. \tag{7}$$

В случае, когда неголономные связи заданы в виде $\dot{q}_l = a_{l\alpha}\dot{q}_\alpha$, можно написать выражение для D_α в виде

$$D_\alpha = -\frac{\partial N_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\beta + 2\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_l} a_{l\alpha},$$

где N_β состоит из тех слагаемых в выражении $\partial R_l / \partial \ddot{q}_\beta$, которые не содержат вторых производных от координат. Если ввести функцию $\overline{T}_1$, получающуюся при рассмотрении T как функции только от зависимых скоростей $[\dot{q}_l]$, и функцию R_{l_1}, рассматривая R как функцию только $[\ddot{q}_l]$, выраженных через $[\ddot{q}_\alpha]$ из уравнений связей, то уравнения (3) могут быть переписаны в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \overline{T}_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial R_{l_1}}{\partial \ddot{q}_\alpha} = P_\alpha. \tag{8}$$

Найдем теперь, какую форму примут уравнения движения, если вместо функции R ввести в рассмотрение функцию

$$\overline{R} = {}^1/_2\,(\ddot{\overline{T}} - 3\ddot{\overline{T}}_0), \tag{9}$$

где под $\overline{T}$ подразумевается преобразованная кинетическая энергия системы с учетом неголономных связей, а $\overline{T}_0$ является функцией $\overline{T}$, рассматриваемой как функция одних координат $[q_\alpha]$, $[q_l]$, t (но не скоростей).

Для нахождения этой новой формы уравнений, очевидно, следует вычислить разность

$$\overline{D}_\alpha = \frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_\alpha} - \frac{\partial \overline{R}}{\partial \ddot{q}_\alpha}, \tag{10}$$

после чего уравнения движения напишутся в виде

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \overline{D}_\alpha = P_\alpha. \tag{11}$$

Непосредственные вычисления приводят к следующему выражению для $\overline{D}_\alpha$:

$$\overline{D}_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_k} a_{k\alpha} - \dot{a}_{l\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{l\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_l} a_{l\alpha} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_l} a_{l\alpha}.$$

В частности, если T не зависит от $[q_l]$, уравнения движения неголономной системы будут иметь вид

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l}\left(\frac{\partial \dot{q}_l}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{l\alpha}\right) = P_\alpha$$

или

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_\alpha} - \dot{a}_{i\alpha}\right) = P_\alpha. \tag{12}$$

В случае же интегрируемости уравнений связей, т. е. для голономной системы, мы будем иметь уравнения:

$$\frac{\partial \overline{R}}{\partial \ddot{q}_\alpha} = P_\alpha \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} = P_\alpha. \tag{13}$$

Таким образом, уравнения движения для двух систем, обладающих одной и той же кинетической энергией и одной и той же функцией $\overline{R}$ и подверженных действию одних и тех же активных сил, различны, если одна из этих систем подчинена голономным связям, а другая — неголономным.

Необходимо отметить, что уравнения (12) можно переписать также в форме, указанной С. А. Чаплыгиным, а именно:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\partial a_{i\beta}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial a_{i\alpha}}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\beta = P_\alpha. \tag{14}$$

В той же работе (¹) мы получили уравнения движения голономных систем в виде

$$\partial K / \partial \ddot{q}_i = 0, \quad \text{где} \quad K = {}^1/_2\,(\ddot{T} - 3\ddot{T}_0). \tag{1'}$$

Эти уравнения можно переписать в виде

$$g_{ik}\ddot{q}_k + \begin{bmatrix} kr \\ i \end{bmatrix}\dot{q}_k\dot{q}_r - \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \tag{15}$$

где g_{ik} — коэффициенты в выражении живой силы.

Произведем преобразование независимой переменной t, перейдя от нее к новой независимой переменной σ согласно соотношению

$$\frac{d\sigma}{dt} = N, \quad \text{где } N = 2\,(U + h) \tag{16}$$

и h — константа в интеграле живых сил. Тогда уравнения движения системы (1) сохранят свою форму и будут иметь вид:

$$\frac{\partial K_1}{\partial q_i''} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{17}$$

где

$$K_1 = \frac{1}{2} N g_{ik} q_k'' q_i'' + \left[\frac{\partial (N g_{ik})}{\partial q_r} - \frac{1}{2}\frac{\partial (N g_{kr})}{\partial q_i}\right] q_k' q_r' q_i'' \tag{18}$$

(с учетом интеграла живых сил), а интеграл живых сил примет вид

$$N g_{ik} q_i' q_k' = 1; \tag{19}$$

штрихами обозначены производные по σ.

При наличии же неголономных связей уравнения (1′) переходят в уравнения

$$\frac{\partial K_l}{\partial \ddot{q}_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \tag{20}$$

где K_l получено из K путем замены $[\ddot{q}_i]$ через $[\ddot{q}_r]$. Эти уравнения оказываются тоже инвариантными относительно преобразования (16).

Будем изображать теперь движение механической системы с координатами (q_1, q_2, ..., q_s) движением точки в пространстве s измерений с метрикой

$$ds^2 = g_{ik}\, dq_i\, dq_k. \tag{21}$$

Положим, что система движется без действия активных сил, т. е. $U = 0$. Тогда изображающая ее точка будет двигаться по геодезической линии, и мы будем иметь по (19):

$$d\sigma^2 = 2h\, ds^2.$$

Очевидно теперь, что уравнения (17) представляют собой уравнения геодезических линий в пространстве конфигураций голономной системы (движущейся под действием только реакций идаельных связей). Так же уравнения

$$\frac{\partial K_{l_1}}{\partial q''_\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, k),$$

полученные после перехода в (20) к новой переменной σ, выражают геодезические линии неголономного многообразия конфигураций системы, на которую наложены неголономные связи.

Поступило
17 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ценов, ДАН, 89, № 1 (1953).