Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

М. Г. СЛОБОДЯНСКИЙ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 7 I 1953)

Положим, что требуется найти решение самосопряженного эллиптического дифференциального уравнения 2-го порядка [1]

$$Au = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + cu = f \tag{1}$$

при краевых условиях вида

$$u|_s = 0, \tag{2}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{m}\cos(\widehat{\nu, x_j})\sum_{k=1}^{m}p_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right]_S = 0, \tag{3}$$

где p_{jk} — непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных $x_1, \ldots, x_s$ в конечной области $\Omega + S$; ν — внешняя нормаль к S; f — квадратично суммируемая функция в Ω.

Если квадратичная форма $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{m}p_{jk}\xi_i\xi_j$ положительно-определенная и коэффициент $c \geqslant 0$ при краевом условии (2) и имеет положительную нижнюю грань при краевом условии (3), то оператор A положительно-определенный и указанные краевые задачи, как известно [2], приводятся к задаче о минимуме функционала

$$F_f^A(u) = (Au,\ u) - 2(f, u) =$$
$$= \int_\Omega \left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}p_{jk}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} + cu^2\right\}d\Omega - 2\int_\Omega fu\,d\Omega. \tag{4}$$

Наряду с указанной краевой задачей рассмотрим краевую задачу для уравнения (1) с правой частью f' при тех же краевых условиях (2) или (3).

Соответствующее решение обозначим через u' и определим приближенное значение скалярного произведения

$$(f',\ u) = \int_\Omega f'u\,d\Omega. \tag{5}$$

На основании результатов работ [3,4] имеем

$$\left|(f', u) - \frac{b_n + b_n^*}{2}\right| < \delta, \tag{6}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{(a_n - a_n^*)(c_n - c_n^*)}. \tag{7}$$

Здесь величины a_n, b_n, c_n, a_n^*, b_n^*, c_n^* должны быть определены так, чтобы имели место неравенства

$$a_n^* + 2b_n^*\lambda + c_n^*\lambda^2 \leqslant F_{f+\lambda f'}^A(u+\lambda u') \leqslant a_n + 2b_n\lambda + c_n\lambda^2 \tag{8}$$

при любом значении вещественного параметра λ.

Для определения $a_n, \ldots, c_n^*$ предварительно преобразуем задачу об определении минимума функционала (4) к задаче об определении максимума другого функционала H, так чтобы минимум $F_f^A(u)$ был равен максимуму H.

Для некоторых частных задач преобразование проблемы минимума к проблеме максимума дано Фридрихсом и изложено в [5].

Излагаемый ниже метод преобразования задачи об определении минимума $F_f^A(u)$ к задаче об определении максимума функционала H может быть применен к широкому классу линейных краевых задач.

Составим дифференциальное уравнение Эйлера для функционала (4). Имеем:

$$F_u - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j} F_{u_j} = f, \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} 2F = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} p_{jk} u_j u_k + cu^2, \quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, \\ F_u = cu, \quad F_{u_j} = \frac{\partial F}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{m} p_{jk} u_k. \end{gathered} \tag{10}$$

Введя новые переменные F_{u_j} и F_u, найдем из (10)

$$u_k = \sum_{j=1}^{m} p'_{jk} F_{u_j}, \quad u = \frac{1}{c} F_u, \tag{11}$$

где $\| p'_{jk} \|$ — матрица, обратная по отношению к матрице $\| p_{jk} \|$.

Краевое условие (3) запишется в виде

$$\left[\sum_{j=1}^{m} \cos(\widehat{\nu, x_j}) F_{u_j} \right]_S = 0. \tag{12}$$

Далее, пусть u_0 — элемент, реализующий минимум функционала (4) $F_{u_k}^0$, F_u^0 — значения левых частей (10) при $u = u_0$, $u_k^0 = \partial u_0 / \partial x_k$.

Составим выражение

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} p'_{jk} (F_{u_j}^0 - F_{u_j})(F_{u_k}^0 - F_{u_k}) + \frac{1}{c}(F_u^0 - F_u)^2 \right\} d\Omega > 0; \tag{13}$$

прибавляя к левой части (13) и вычитая из нее выражение $2\int_\Omega f u_0 \, d\Omega$, получим, принимая во внимание (4), (10) и (11):

$$\begin{gathered} F_f^A(u_0) + \int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} p'_{jk} F_{u_j} F_{u_k} + \frac{1}{c} F_u^2 \right\} d\Omega - \\ -2\int_\Omega \left\{ \sum_{k=1}^{m} u_k^0 F_{u_k} + u_0 F_u - u_0 f \right\} d\Omega > 0. \end{gathered} \tag{14}$$

Так как левая часть (13) или, что все равно, (14) достигает минимума при $F_u = F_u^0$, $F_{u_k} = F_{u_k}^0$ $(k = 1, \ldots, m)$, то сумма интегралов в (14) достигает минимума также при $F_u = F_u^0$, $F_{u_k} = F_{u_k}^0$, и этот минумум равен $-F_f^A(u_0)$.

Преобразуем второй интеграл в (14) по частям:

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{k=1}^m u_k^0 F_{u_k} + u_0 F_u - u_0 f \right\} d\Omega =$$

$$= \int_\Omega u_0 \left[- \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} F_{u_k} + F_u - f \right] d\Omega - \int_S u_0 \sum_{j=1}^m \cos(\widehat{\nu, x_j}) F_{u_j} dS. \tag{15}$$

В силу краевых условий (2), (12) второй интеграл в (15) равен нулю.

Очевидно, что минимум левой части (14) не изменится, если на функции F_u и F_{u_k} наложим дополнительное условие (9), ибо левая часть (14) достигает минимума при $F_u = F_u^0$, $F_{u_k} = F_{u_k}^0$.

При выполнении условия (9) первый интеграл в правой части (15) также равен нулю и, следовательно, второй интеграл в правой части (14) равен нулю.

Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Теорема 1. *Минимум функционала*

$$H(\sigma) = \int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p'_{jk} F_{u_k} F_{u_j} + \frac{1}{c} F_u^2 \right\} d\Omega, \tag{16}$$

где функции $\{\sigma\} = \{F_u, F_{u_1}, \ldots, F_{u_m}\}$ *удовлетворяют уравнению* (9) *и в случае краевого условия* (3) *удовлетворяют также* (12), *равен* $-F_f^A(u_0)$, *т. е.*

$$\min H(\sigma) = -F_f^A(u_0) = H(\sigma_0), \tag{17}$$

где

$$\{\sigma_0\} = \{F_u^0, F_{u_1}^0, \ldots, F_{u_m}^0\}.$$

Для получения неравенства (8) можно взять любые допустимые элементы $u_n + \lambda u'_n$, удовлетворяющие граничным условиям (2) или(3), и функции $\{\sigma_n + \lambda\sigma'_n\} = \{F_u^{(n)} + \lambda F_u^{(n)\prime}, F_{u_1}^{(n)} + \lambda F_{u_1}^{(n)\prime}, \ldots\}$, удовлетворяющие уравнению (9) с правой частью $(f + \lambda f')$, а в случае краевого условия (3) удовлетворяющие также уравнению (12), и положить:

$$\begin{aligned} F_f^A(u_n + \lambda u'_n) &= a_n + 2b_n\lambda + c_n\lambda^2, \\ -H(\sigma_n + \lambda\sigma'_n) &= a_n^* + 2b_n^*\lambda + c_n^*\lambda^2. \end{aligned} \tag{18}$$

В данном случае положим, что u_n и u'_n являются решениями уравнений

$$A_1 u^* = f, \quad A_1 u^{*\prime} = f' \tag{19}$$

при краевых условиях (2) или (3), где A_1 — самосопряженный эллиптический дифференциальный оператор

$$A_1 u = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} \left(p_{jk}^* \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + c^* u, \tag{20}$$

p^*_{jk} — непрерывно-дифференцируемые функции независимых переменных $x_1, \ldots, x_s$.

Далее положим:

$$F_{u^*} = c^* u^*, \quad F^*_{u_j} = \sum_{k=1}^{m} p^*_{jk} u^*_k, \tag{21}$$

$$F_{u^{*\prime}} = c^* u^{*\prime}, \quad F^{*\prime}_{u_j} = \sum_{k=1}^{m} p^*_{jk} u^{*\prime}_k, \tag{22}$$

$$u^*_k = \sum_{j=1}^{m} p^{**}_{jk} F^*_{u_j}, \quad u^{*\prime}_k = \sum_{j=1}^{m} p^{**}_{jk} F^{*\prime}_{u_j},$$

где $\| p^{**}_{jk} \|$ — матрица, обратная по отношению к матрице $\| p^*_{jk} \|$.

Очевидно, что функции (21) и (22) удовлетворяют уравнению (9) с правыми частями f и f', соответственно, и условию (3) и являются, следовательно, допустимыми элементами для определения минимума функционала $H(\sigma)$.

Подставляя (21) и (22) в (16) и принимая во внимание (4), (17), (18), найдем:

$$a_n - a^*_n = \int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} (p_{jk} - p^*_{jk}) \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \frac{\partial u^*}{\partial x_k} + (c - c^*) u^{*2} \right\} d\Omega +$$

$$+ \int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} (p'_{jk} - p^{**}_{jk}) F^*_{u_j} F^*_{u_k} + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c^*} \right) F^2_{u^*} \right\} d\Omega. \tag{23}$$

Далее, $c_n - c^*_n$ равняется правой части (23), в которой u^* заменено на $u^{*\prime}$ и $F^*_{u_k}$ заменена на $F^{*\prime}_{u_k}$.

$$b_n = \int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} p_{jk} \frac{\partial u^*}{\partial x_j} \frac{\partial u^{*\prime}}{\partial x_k} + c u^* u^{*\prime} \right\} d\Omega - 2 \int_\Omega f' u \, d\Omega,$$

$$b^*_n = \int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} p'_{jk} F^*_{u_k} F^{*\prime}_{u_j} + \frac{1}{c} F^*_u F^{*\prime}_u \right\} d\Omega. \tag{24}$$

Подставляя (24) и (23) в (6) и (7), найдем приближенное значение для $\int_\Omega f' u \, d\Omega$ и оценку погрешности δ.

Введя функцию Грина $G = G_1 + G_2$, где G_1 — функция, обладающая той же особенностью, что и функция Грина G, и удовлетворяющая условиям (2) или (3), и обозначая $AG_2 = f'$, получим

$$u = \int_\Omega G f \, d\Omega = \int_\Omega G_1 f \, d\Omega + \int_\Omega f' u \, d\Omega. \tag{25}$$

Воспользовавшись (25), найденным приближенным значением второго интеграла в (25) и оценкой погрешности δ, найдем приближенное значение для u и оценку погрешности.

Поступило
30 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 4, 1950. [2] С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, 1950. [3] М. Г. Слободянский, ДАН, 86, № 2 (1952). [4] М. Г. Слободянский, Прикладн. матем. и мех., 16, № 4. (1952). [5] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, 1934.