

В. П. СКИТОВИЧ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 12 I 1953)

Предлагаемая работа является обобщением работ С. Н. Бернштейна⁽¹⁾ и Б. В. Гнеденко⁽²⁾.

Будем рассматривать совокупность независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n и линейные формы от этих случайных величин*

$$l_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n,$$

$$l_2 = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_n X_n,$$

такие, что $a_i b_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Теорема. Если линейные формы l_1 и l_2 независимы, то все случайные величины X_i распределены нормально.

Коротко наметим путь доказательства.

Пусть $f_k(t)$ — характеристическая функция случайной величины l_k ($k = 1, 2$) и $\varphi_i(t)$ — характеристическая функция случайной величины X_i ($i = 1, 2, \dots, n$); тогда

$$f_1(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(a_i t),$$

$$f_2(\tau) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(b_i \tau), \quad (1)$$

$$f_1(t) f_2(\tau) = \prod_{i=1}^n \varphi_i(a_i t + b_i \tau).$$

Легко показать, что ни одна из характеристических функций, входящих в (1), не обращается в нуль.

Обозначим

$$\Psi_k(t) = \ln f_k(t) \quad (k = 1, 2),$$

$$\psi_i(t) = \ln \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

тогда

$$\Psi_1(t) + \Psi_2(\tau) = \sum_{i=1}^n \psi_i(a_i t + b_i \tau). \quad (2)$$

Придадим t и τ произвольные приращения h_1 и h_2 :

$$\Psi_1(t + h_1) + \Psi_2(\tau + h_2) = \sum_{i=1}^n \psi_i(a_i t + b_i \tau + a_i h_1 + b_i h_2), \quad (3)$$

* Величины не предполагаются одинаково распределенными.

$$\Psi_1(t + h_1) + \Psi_2(\tau) = \sum_{i=1}^n \psi_i(a_i t + b_i \tau + a_i h_1), \quad (4)$$

$$\Psi_1(t) + \Psi_2(\tau + h_2) = \sum_{i=1}^n \psi_i(a_i t + b_i \tau + b_i h_2). \quad (5)$$

Складывая (2) и (3) и вычитая из них (4) и (5), получим

$$\sum_{i=1}^n F_i(a_i t + b_i \tau, h_1 a_i, h_2 b_i) = 0, \quad (6)$$

где

$$F_i(a_i t + b_i \tau, h_1 a_i, h_2 b_i) = \psi_i(a_i t + b_i \tau + a_i h_1 + b_i h_2) - \\ - \psi_i(a_i t + b_i \tau + a_i h_1) - \psi_i(a_i t + b_i \tau + b_i h_2) + \psi_i(a_i t + b_i \tau).$$

Так как формы l_1 и l_2 независимы, то найдутся коэффициенты a_k, b_k, a_l, b_l такие, что $a_k b_l - a_l b_k \neq 0$.

Обозначим $a_k t + b_k \tau = z$ и $a_l t + b_l \tau = u$. Величины z и u независимы. Перепишем теперь функциональное уравнение (6) так:

$$\sum_r F_r(c_r z, c_r h_1 a_k, c_r h_2 b_k) + \sum_j F_j(d_j u, d_j h_1 a_l, d_j h_2 b_l) + \\ + \sum_s F_s(c_s z + d_s u, h_1 a_s, h_2 b_s) = 0. \quad (7)$$

Суммирование производится по всем значкам r, j, s , для которых

$$a_r t + b_r \tau = c_r z, \quad a_j t + b_j \tau = d_j u, \quad a_s t + b_s \tau = c_s z + d_s u.$$

Если $\sum_s F_s$ пуста, то равенство (7) возможно только тогда, когда

$$\sum_r F_r(c_r z, c_r h_1 a_k, c_r h_2 b_k) = - \sum_j F_j(d_j u, d_j h_1 a_l, d_j h_2 b_l) = C(h_1, h_2). \quad (8)$$

Положим теперь

$$\sum_r \psi_r(c_r z) = \Psi(z), \quad h_1 a_k = h, \quad h_2 b_k = h, \quad C\left(\frac{h}{a_k}, \frac{h}{b_k}\right) = C_1(h);$$

тогда

$$\Delta_h^2 \Psi(z) = C_1(h). \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует, что $\Psi(z)$ — многочлен второй степени. Так как случайные величины X_r независимы, то все они распределены нормально⁽³⁾.

Аналогичный результат может быть получен и для случайных величин X_j .

В том случае, когда $\sum_s F_s$ не пуста, мы придадим новым переменным z и u произвольные приращения h_3 и h_4 точно так же, как это делается для величин t и τ .

В результате получим

$$\sum_s \Phi_s(c_s z + d_s u, h_1 a_s, h_2 b_s, h_3 c_s, h_4 d_s) = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} & \Phi_s(c_s z + d_s u, h_1 a_s, h_2 b_s, h_3 c_s, h_4 d_s) = \\ & = F_s(c_s z + d_s u + h_3 c_s + h_4 d_s, h_1 a_s, h_2 b_s) - \\ & - F_s(c_s z + d_s u + h_3 c_s, h_1 a_s, h_2 b_s) - F_s(c_s z + d_s u + h_4 d_s, h_1 a_s, h_2 b_s) + \\ & + F_s(c_s z + d_s u, h_1 a_s, h_2 b_s). \end{aligned}$$

Функциональное уравнение (10) аналогично уравнению (6), но число неизвестных функций, входящих в него, по крайней мере на две меньше.

Выберем из коэффициентов c_s, d_s какую-либо пару c_p, d_p ; тогда либо для всех c_m, d_m ($c_m \neq 0$ и $d_m \neq 0$) $c_p d_m - c_m d_p = 0$; либо найдется хотя одна пара c_q, d_q такая, что $c_p d_q - c_q d_p \neq 0$.

В первом случае, обозначив $c_p z + d_p u = v$, мы получим, что $\sum_s F_s, \sum_r F_r$ и $\sum_j F_j$ являются многочленами степени не выше первой, а $\sum_s \psi_s(c_s z + d_s u), \sum_r \psi_r(c_r z)$ и $\sum_j \psi_j(d_j u)$ — многочленами степени не выше третьей.

Следовательно (на основании (4) и (3)), все случайные величины X_i будут распределены нормально.

Во втором случае, обозначив $c_p z + d_p u = v$ и $c_q z + d_q u = w$, будем поступать так же, как мы поступали при решении функционального уравнения (6). В результате мы либо решим функциональное уравнение (10) (а следовательно, и уравнение (6)), либо придем к уравнению аналогичного вида, но с числом неизвестных функций, по крайней мере, на две меньше, чем в уравнении (10), и т. д. Так как число неизвестных функций конечно, то этот процесс рано или поздно оборвется.

Решением последнего уравнения будет многочлен не выше второй степени, а из этого следует, что $\sum_r \psi_r(c_r z), \sum_j \psi_j(d_j u)$ и $\sum_s \psi_s(c_s z + d_s u)$ будут многочленами. На основании (4) они будут многочленами второй степени, и все случайные величины X_i будут распределены нормально.

Поступило
22 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, Тр. Ленинградск. политехн. ин-та им. М. И. Калинина, 3 (1941). ² Б. В. Гнеденко, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, № 1, 97 (1948). ³ Г. Крамер, Случайные величины и распределение вероятностей, 1947. ⁴ J. M a g s i n k i e w i c z, Math. Z., 44, 612 (1838).