

М. А. НАЙМАРК

О РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 27 XII 1952)

В заметке (4)* автора изложен ряд результатов о спектре оператора L_θ , порожденного дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + p(x)y$, $0 \leq x < \infty$, и краевым условием $y'(0) - \theta y(0) = 0$, причем $p(x)$ и θ , вообще говоря, комплексны.

Как впервые показал Г. Вейл (6), в случае вещественных $p(x)$ и θ имеет место разложение заданной функции в интеграл Стильбеса по собственным функциям оператора L_θ , аналогичное разложению в классический интеграл Фурье.

Вопрос о разложении по собственным функциям несамосопряженного сингулярного дифференциального оператора до сих пор оставался открытым**. В настоящей заметке дается решение этого вопроса для оператора L_θ в том случае, когда $x^2 p(x)$ (вообще комплекснозначная) — функция, суммируемая в интервале $(0, \infty)$ ***. В этом случае уравнение $-y'' + p(x)y = s^2 y$ имеет два решения: $y_1(x, s)$, $\text{Im } s \geq 0$, и $\tilde{y}_1(x, s)$, $\text{Im } s \leq 0$, удовлетворяющих уравнениям

$$y_1(x, s) = e^{isx} + \frac{i}{2s} \int_x^\infty [e^{is(x-\xi)} - e^{-is(x-\xi)}] p(\xi) y_1(\xi, s) d\xi, \quad (1a)$$

$$\tilde{y}_1(x, s) = e^{-isx} + \frac{i}{2s} \int_x^\infty [e^{is(x-\xi)} - e^{-is(x-\xi)}] p(\xi) \tilde{y}_1(\xi, s) d\xi. \quad (1b)$$

При фиксированном x , $0 \leq x < \infty$, эти решения являются голоморфными функциями от s в полуплоскостях $\text{Im } s > 0$, $\text{Im } s < 0$, соответственно, непрерывными при $\text{Im } s \geq 0$, $\text{Im } s \leq 0$, соответственно. Положим

$$A(s) = y_1(0, s) - \theta y_1(0, s), \quad \text{Im } s \geq 0; \quad (2a)$$

$$\tilde{A}(s) = \tilde{y}_1(0, s) - \theta \tilde{y}_1(0, s), \quad \text{Im } s \leq 0; \quad (2b)$$

$$y(x, s) = \tilde{A}(s) y_1(x, s) - A(s) \tilde{y}_1(x, s), \quad s \geq 0. \quad (3)$$

* Мы здесь сохраняем терминологию и обозначения заметки (4).

** Для случая несамосопряженного регулярного оператора наиболее сильные результаты были недавно получены М. В. Келдышем (2) (по этому поводу см. также (1) и (5)).

*** Основные результаты этой заметки переносятся на некоторые классы несамосопряженных дифференциальных операторов высших порядков.

Легко видеть, что $y(x, s)$ есть решение уравнения $-y'' + p(x)y = s^2y$, удовлетворяющее условию $y'(0, s) - \theta y(0, s) = 0$. Можно показать, что для $A(s)$ и $\bar{A}(s)$ при $s \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические формулы

$$A(s) = is \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right], \quad \text{Im } s \geq 0; \quad \bar{A}(s) = -is \left[1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right], \quad \text{Im } s \leq 0. \quad (4)$$

Для простоты изложения мы сформулируем основные результаты о разложении по собственным функциям оператора L_θ при следующих дополнительных предположениях: 1) собственные значения оператора L_θ являются простыми полюсами его резольвенты; 2) функции $A(s)$, $\bar{A}(s)$ не обращаются в нуль при $s \geq 0$.

Из условия 1) вытекает, что собственные значения оператора L_θ имеют простые элементарные делители; из условия 2) следует простота элементарных делителей в непрерывном спектре. Из условия 2) вытекает также, что оператор L_θ имеет только конечное число собственных значений. Пусть это будут $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Соответствующие собственные функции мы обозначим через $y_1(x), y_2(x), \dots, y_r(x)$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1), 2), и пусть $K(x, \xi, \lambda)$ — ядро резольвенты $(L_\theta - \lambda I)^{-1}$ оператора L_θ . Для любой точки λ , не принадлежащей спектру оператора L_θ ,

$$K(x, \xi, \lambda) = \sum_{k=1}^r \frac{y_k(x) y_k(\xi)}{(\lambda_k - \lambda) \int_0^\infty [y_k(x)]^2 dx} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{y(x, s) y(\xi, s)}{(s^2 - \lambda) A(s) \bar{A}(s)} ds^*, \quad (5)$$

где интеграл сходится абсолютно и равномерно относительно x, ξ в области $0 \leq x, \xi \leq \infty$.

Обозначим через \mathfrak{E}_θ совокупность всех функций $g(x)$, $0 \leq x < \infty$, удовлетворяющих следующим условиям: а) $g(x)$ суммируема в интервале $(0, \infty)$; б) $g'(x)$ существует и абсолютно непрерывна в каждом конечном интервале $[0, a]$, $a > 0$; в) функция $l(g) = -g'' + p(x)g$ суммируема в интервале $(0, \infty)$; г) $g'(0) - \theta g(0) = 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1), 2). Тогда всякую функцию $g(x) \in \mathfrak{E}_\theta$ можно представить в виде

$$g(x) = \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k y_k(x)}{\int_0^\infty [y_k(x)]^2 dx} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha(s) y(x, s)}{A(s) \bar{A}(s)} ds, \quad (6)$$

где

$$\alpha_k = \int_0^\infty g(x) y_k(x) dx, \quad \alpha(s) = \int_0^\infty g(x) y(x, s) dx \quad (7)$$

и где интеграл в правой части (6) сходится абсолютно и равномерно относительно x в интервале $0 \leq x < \infty$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1), 2) и пусть $g(x) \in \mathfrak{E}_\theta$, а $h(x)$ — произвольная функция, суммируемая в интервале $(0, \infty)$.

* Как известно, если λ_k — простой полюс резольвенты, то $\int_0^\infty [y_k(x)]^2 dx \neq 0$.

Тогда интеграл $\int_0^{\infty} g(x)h(x)dx$ сходится абсолютно и

$$\int_0^{\infty} g(x)h(x)dx = \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k \beta_k}{\int_0^{\infty} [y_k(x)]^2 dx} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\alpha(s)\beta(s)}{A(s)\bar{A}(s)} ds, \quad (8)$$

где

$$\alpha_k = \int_0^{\infty} g(x)y_k(x)dx, \quad \beta_k = \int_0^{\infty} h(x)y_k(x)dx, \quad (9)$$

$$\alpha(s) = \int_0^{\infty} g(x)y(x,s)dx, \quad \beta(s) = \int_0^{\infty} h(x)y(x,s)dx; \quad (10)$$

при этом интеграл в правой части (8) сходится абсолютно.

Теорему 3 можно рассматривать как аналог равенства Парсеваля. Формулы (6) и (8) можно распространить на некоторые более широкие классы функций $g(x)$, $h(x)$ аналогично тому, как это делается для самосопряженных операторов.

Теорема 2 получается из теоремы 1, если обе части (5) умножить на функцию $f(\xi) = l(g) - \lambda g = -g''(\xi) + p(\xi)g(\xi) - \lambda g(\xi)$ и проинтегрировать по ξ от 0 до ∞ . Теорема 3 получается из теоремы 2, если обе части (6) умножить на $h(x)$ и проинтегрировать по x от 0 до ∞ .

Доказательство теоремы 1 мы проводим сперва для того случая, когда функция $p(x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$\int_0^{\infty} e^{\varepsilon x} |p(x)| dx < \infty \quad (11)$$

при некотором $\varepsilon > 0$, а затем переходим к случаю произвольной функции $x^2 p(x)$, суммируемой в интервале $(0, \infty)$, аппроксимируя ее функциями $p(x)$, удовлетворяющими условию (11).

Пусть $p(x)$ удовлетворяет условию (11); тогда решения $y_1(x, s)$, $y_1(x, s)$ определены и голоморфны при $\text{Im } s > -1/2\varepsilon$, $\text{Im } s < 1/2\varepsilon$, соответственно, и потому функции $A(s)$, $\bar{A}(s)$ определены и голоморфны в полосе $|\text{Im } s| < 1/2\varepsilon$. Из условия 2), и асимптотических формул (4) вытекает, что при достаточно малом положительном ε_1 функции $A(s)$, $\bar{A}(s)$ не обращаются в нуль в полуполосе $|\text{Im } s| \leq \varepsilon_1$, $\text{Re } s \geq 0$. Следовательно, в этой полуполосе можно определить однозначную голоморфную функцию

$$\omega(s) = \ln \frac{A(s)}{\bar{A}(s)}, \quad (12)$$

полагая, например, $\lim_{s \rightarrow \infty} \omega(s) = i\pi$ (см. (4)).

Рассмотрим следующую краевую задачу в интервале $[0, b]^*$:

$$l(y) = \lambda y, \quad y'(0) - \theta y(0) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (13)$$

* Как показал Б. М. Левитан (3), в случае самосопряженного оператора L_θ разложение по собственным функциям можно весьма просто получить, разлагая заданную функцию по собственным функциям краевой задачи (13) и переходя затем к пределу при $b \rightarrow \infty$. В нашем случае произвольного не самосопряженного оператора L_θ такой переход к пределу уже не является столь простым; его проведение основано на изложенных ниже результатах о краевой задаче (13).

Пусть $K_b(x, \xi, \lambda)$ — ядро резольвенты этой краевой задачи. Если не принадлежит спектру оператора L_0 , то при $b \rightarrow \infty$

$$K_b(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi, \lambda) + o(1) \quad (14)$$

равномерно относительно x, ξ в каждом конечном квадрате $0 \leq x, \xi \leq c, c > 0$. При b достаточно большом каждому из собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ оператора L_0 отвечает в точности по одному собственному значению $\lambda_1(b), \lambda_2(b), \dots, \lambda_r(b)$ краевой задачи (13) так, что $\lambda_k(b) \rightarrow \lambda_k$ при $b \rightarrow \infty$. Все остальные собственные значения краевой задачи (13) удовлетворяют асимптотическому соотношению

$$\lambda = \tilde{s}^2, \quad \tilde{s} = \frac{n\pi}{b} + \frac{1}{2ib} \omega\left(\frac{n\pi}{b}\right) + o\left(\frac{1}{b}\right) \quad (15)$$

(см. (12)) при $b \rightarrow \infty$ равномерно относительно \tilde{s} в полуполосе $|\operatorname{Im} s| \leq \varepsilon_1, \operatorname{Re} s \geq 0$; при этом n — целые числа такие, что \tilde{s} находится в этой полуполосе.

Если $y_k(x, b), k = 1, 2, \dots, r$ — собственные функции краевой задачи (13), отвечающие $\lambda_k(b), k = 1, 2, \dots, r$, то при $b \rightarrow \infty$

$$\frac{y_k(x, b)}{\int_0^b [y_k(x, b)]^2 dx} = \frac{y_k(x)}{\int_0^\infty [y_k(x)]^2 dx} + o(1), \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (16)$$

равномерно относительно $x, 0 \leq x \leq c, c > 0$. Кроме того при $b \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{b} \int_0^b [y(x, \tilde{s})]^2 dx = -2A(\tilde{s})\tilde{A}(\tilde{s}) + o(1) \quad (17)$$

равномерно относительно \tilde{s} в каждом прямоугольнике $|\operatorname{Im} \tilde{s}| \leq \varepsilon_1, 0 \leq \operatorname{Re} \tilde{s} \leq \beta, \beta > 0$.

Для вывода формулы (5) ядро $K_b(x, \xi, \lambda)$ рассматривается при $b = q \sqrt{m}$ на некоторых кривых $C_{m,q}$ (m, q — натуральные числа), определенных следующим образом: $C_{m,q}$ есть замкнутая кривая, составленная из двух дуг $C'_{m,q}, C''_{m,q}$, состоящих из точек λ , удовлетворяющих соотношениям: $C'_{m,q}: \lambda = s^2, s = R_{m,q} + i\tau, -\varepsilon_1 \leq \tau \leq \varepsilon_1,$

$$R_{m,q} = \left(m + \frac{1}{2q}\right) \frac{\pi}{\sqrt{m}}; \quad C''_{m,q}: \lambda = s^2, \quad |s|^2 = R_{m,q}^2 + \varepsilon_1^2, \quad \operatorname{Im} s \geq \varepsilon_1.$$

На кривых $C_{m,q} |K_b(x, \xi, \lambda)| \leq \operatorname{const}/\sqrt{|\lambda|}$ и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{m,q}} \frac{K_b(x, \xi, \lambda)}{\lambda - \lambda_0} d\lambda \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad (18)$$

равномерно относительно q .

Применим к последнему интегралу теорему о вычетах и перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty$; учитывая соотношения (14)–(18), мы получим формулу (5) при $\lambda = \lambda_0$.

Поступило
23 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9, 373 (1908). ² М. В. Келдыш, ДАН, 77, 11 (1951). ³ Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, 1950. ⁴ М. А. Наймарк, ДАН, 85, 41 (1952). ⁵ Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. ⁶ H. Weyl, Math. Ann., 68, 222 (1910).