Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЛИННИК и А. В. МАЛЫШЕВ

О ЦЕЛЫХ ТОЧКАХ НА СФЕРЕ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 27 XII 1952)

Целью настоящей заметки является доказательство теоремы, смысл которой сводится к тому, что целые точки на сфере (если они существуют) распределены в известном смысле равномерно.

Теорема. *Пусть q — какое-нибудь нечетное простое число и m — целое число, примитивно представимое суммой трех квадратов (т. е. $m \neq 4a;\ 8b+7$), причем $\left(\frac{-m}{q}\right)=+1$*. Тогда для достаточно больших m в любом сферическом круге на сфере $x^2+y^2+z^2=m$, телесный угол** которого $>\lambda>0$, где λ — любая постоянная, не зависящая от m, найдется*

$$>ch(-m)$$

целых примитивных точек решетки. Здесь $c>0$ — постоянная, зависящая лишь от q и λ.

Доказательство. 1) В доказательстве этой теоремы мы будем опираться на аналогичную теорему для случая четырех измерений:

Угол между лучом, направленным в любую точку четырехмерной сферы, и лучом, направленным в ближайшую целую точку на этой сфере, есть величина бесконечно малая, когда радиус сферы неограниченно возрастает.

Эта теорема может быть доказана известными аналитическими методами ([1]), однако, ввиду ограниченности места, доказательство ее мы опускаем.

2) Возвращаемся к доказательству нашей теоремы. Пусть дана трехмерная сфера $x^2+y^2+z^2=m$ и на ней сферический круг $\mathfrak{T}$, телесный угол которого $>\lambda$. Нам надо доказать, что в нем имеется достаточно большое количество целых точек. Рассмотрим открытую коническую область $\mathfrak{L}$, вершина которой лежит в центре шара и которая пересекается с нашей сферой по кругу $\mathfrak{T}$. Целью этого пункта является доказательство следующего утверждения: все лучи, выходящие из центра, можно заключить в конечное, зависящее лишь от λ количество открытых конических областей $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ с вершинами в центре, обладающих тем свойством, что можно подобрать

* За такое q можно взять, например, $q=3$. Тогда условие $\left(\frac{-m}{q}\right)=+1$ может быть сформулировано так: $m_1 \equiv 2 \pmod 3$, где m_1 — наибольший нечетный делитель m.

** Под телесным углом фигуры, лежащей на сфере, мы понимаем телесный угол, под которым фигура видна из центра сферы, т. е. величину $S/4\pi r^2$, где S — площадь фигуры, а r — радиус сферы.

n таких целых кватернионов $R_1, R_2, \ldots, R_n$ с нормами, являющимися степенью q, причем произведение $R_1, R_2 \cdot \ldots \cdot R_n$ примитивно, что имеют место включения

$$R_1^{-1}\mathfrak{S}_1 R_1 \subset \mathfrak{L},$$
$$(R_1R_2)^{-1}\mathfrak{S}_2 (R_1R_2) \subset \mathfrak{L},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(R_1R_2 \cdot \ldots \cdot R_n)^{-1}\mathfrak{S}_n (R_1R_2 \cdot \ldots \cdot R_n) \subset \mathfrak{L};$$

при этом равенство $R_1^{-1}\mathfrak{S}_1 R_1 \subset \mathfrak{L}$ понимается в том смысле, что если некоторый трехмерный вектор V, рассматриваемый как вырожденный кватернион, лежит в конусе $\mathfrak{S}_1$, то вектор $R_1^{-1}VR_1$ лежит в конусе $\mathfrak{L}$.

а) Для доказательства этого утверждения рассмотрим коническую область $\mathfrak{L}'$, коаксиальную с областью $\mathfrak{L}$, но имеющую при вершине в центре шара угол вдвое меньший, чем угол $\mathfrak{L}$. Мы, очевидно, сможем заключить все лучи, выходящие из центра, в конечное число конических областей $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$ так, чтобы любую из этих областей вращением вокруг центра можно было перевести в область, составляющую часть области $\mathfrak{L}'$. Это возможно, так как телесный угол $\mathfrak{L}' > \lambda/4$; число n зависит лишь от λ.

Подберем теперь (не обязательно целый) кватернион A_1, осуществляющий упомянутый поворот $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{L}'$, так что

$$A_1^{-1}\mathfrak{S}_1 A_1 \subset \mathfrak{L}'.$$

Точно так же подберем кватернионы $A_2, \ldots, A_n$, чтобы

$$(A_1A_2)^{-1}\mathfrak{S}_2 (A_1A_2) \subset \mathfrak{L}',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(A_1A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1}\mathfrak{S}_n (A_1A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) \subset \mathfrak{L}'.$$

б) Теперь для того, чтобы завершить доказательство утверждения этого пункта, заменим кватернионы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ близкими к ним целыми кватернионами $R_1, R_2, \ldots, R_n$ так, чтобы параметры поворотов подпункта а) изменились мало. Мы можем считать все кватернионы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеющими одинаковую норму q^s, где s — большое целое число, которое мы выберем в настоящем подпункте (мы всегда можем заменить A на tA, не изменяя поворота, которым управляет A).

Пусть R_1 — ближайший к A_1 в смысле угла в четырехмерном пространстве целый кватернион нормы q^s. Тогда угол между векторами $A_1^{-1}VA_1$ и $R_1^{-1}VR_1$, где V — произвольный вектор, может быть сделан (равномерно для всех V) сколь угодно малым при достаточно больших s. Действительно, по теореме, формулированной в п. 1),

$$A_1 = R_1 + \Delta R_1,$$

где $N(\Delta R_1) = o(N(R_1))$.

Поэтому

$$A_1^{-1}VA_1 = \frac{\overline{A}_1 VA_1}{N(A_1)} = \frac{(\overline{R}_1 + \Delta\overline{R}_1)\,V(R_1 + \Delta R_1)}{N(R_1)} =$$
$$= \frac{\overline{R}_1 VR_1}{N(R_1)} + \frac{\overline{\Delta R_1} VR_1 + \overline{R}_1 V\Delta R_1 + \overline{\Delta R_1} V\Delta R_1}{N(R_1)} = R_1^{-1}VR_1 + o(N(V)),$$

ибо

$$N\left(\frac{\overline{\Delta R_1} VR_1 + \overline{R}_1 V\Delta R_1 + \overline{\Delta R_1} V\Delta R_1}{N(R_1)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{N(\overline{\Delta R_1})\,N(V)\,N(R_1)}{(N(R_1))^2} + \frac{N(\overline{R}_1)\,N(V)\,N(\Delta R_1)}{(N(R_1))^2} + \frac{(N(\Delta R_1))^2\,N(V)}{(N(R_1))^2} \leqslant$$
$$\leqslant 3\,N(V)\,\frac{N(\Delta R_1)}{N(R_1)} = o(N(V)).$$

Точно так же можно подобрать целый кватернион R_2 нормы q^s так, что угол между $(A_1A_2)^{-1}V(A_1A_2)$ и $(R_1R_2)^{-1}V(R_1R_2)$ будет сколь угодно малым при больших s.

Принимая во внимание конечность числа наших областей $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots, \mathfrak{S}_n$, мы сможем подобрать такое большое целое число s, что найдутся целые кватернионы $R_1, R_2, \ldots, R_n$ нормы q^s, что

$$R_1^{-1}\mathfrak{S}_1R_1 \subset \mathfrak{L},$$
$$(R_1R_2)^{-1}\mathfrak{S}_2(R_1R_2) \subset \mathfrak{L},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(R_1R_2\cdot\ldots\cdot R_n)^{-1}\mathfrak{S}_n(R_1R_2\cdot\ldots\cdot R_n) \subset \mathfrak{L}.$$

Это действительно возможно, так как $(A_1\cdot\ldots\cdot A_i)^{-1}\mathfrak{S}_i(A_1\cdot\ldots\cdot A_i) \subset \mathfrak{L}'$, а $(R_1\cdot\ldots\cdot R_i)^{-1}\mathfrak{S}_i(R_1\cdot\ldots\cdot R_i)$ сколь угодно мало отличается от $(A_1\cdot\ldots\cdot A_i)^{-1}\mathfrak{S}_i(A_1\cdot\ldots\cdot A_i)$.

Мы можем также считать, что произведение $R_1R_2\cdot\ldots\cdot R_n$ примитивно, ибо в противном случае или $R_i = rR_i'$, где r — целое число, и тогда R_i мы можем заменить на R_i'; или для некоторого i $R_{i-1} = R_{i-1}'Q$, $R_i = \overline{Q}R_i'$, чего можно избежать соответствующим выбором R_i: задаемся любым $Q_1 \neq \overline{Q}E$, подбираем R_i' близким к A_i', где $A_i = QA_i'$, и берем $R_i = Q_1R_i'$.

Тем самым утверждение п. 2) полностью обосновано.

3) По теореме, доказанной нами ранее [2,3], мы подбираем $> c_1h(-m)$ примитивных векторов L нормы m таких, что имеют место равенства

$$l + L = (R_1R_2\cdot\ldots\cdot R_n)X,$$

где l — целое число, а X — целый кватернион. Здесь $c_1 > 0$ зависит только от q^s и n, т. е. от q и λ. Очевидно, найдется такая область $\mathfrak{S}_{i_0}$, где лежит $> \frac{c_1}{n}h(-m) = ch(-m)$ векторов L; $c = c(q, \lambda)$. Тогда более $ch(-m)$ различных целых примитивных векторов

$$(R_1\cdot\ldots\cdot R_{i_0})^{-1}L(R_1\cdot\ldots\cdot R_{i_0})$$

нормы m будут лежать в $\mathfrak{L}$, так что в сферическом круге $\mathfrak{T}$ найдется $> ch(-m)$ примитивных целых точек решетки.

Тем самым теорема доказана полностью.

Следствие. *Угол между лучами, идущими в две соседние целые точки на трехмерной сфере, есть величина бесконечно малая, если радиус сферы беспредельно растет.*

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
22 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. D. Klostermann, Acta Math., 49, 407 (1926). [2] Ю. В. Линник, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, 363 (1940). [3] А. В. Малышев, ДАН, 87, № 2 (1952).