Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

А. И. КЛИМОВ

ОБ ОЦЕНКЕ ГРАНИЦЫ НУЛЕЙ L-ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 8 I 1953)

В настоящей работе получена новая оценка границы нулей L-функций Дирихле (теорема 4).

В формуле для границы нулей $L(s, \chi)$ явно указана зависимость от модуля k характера $\chi(n, k)$ и вычислены входящие в нее постоянные.

Теорема 1. *Пусть p и Q — целые, $p \geqslant 2$,*

$$S_1 = \sum_{z=Q}^{Q+p-1} e^{2\pi i F(z)},$$

где $F(z)$ — действительная функция при

$$Q \leqslant z \leqslant Q + p - 1, \tag{1}$$

и пусть для некоторого $n \geqslant 11$ выполняются неравенства

$$\frac{1}{p^n} \leqslant \left| \frac{F^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!} \right| \leqslant \frac{1}{2p}$$

и для любого z с условием (1)

$$\left| \frac{F^{(n+2)}(z)}{(n+2)!} \right| \leqslant \frac{(8n)^{3n}}{p^{n+2,1}}.$$

Тогда

$$|S_1| < e^{3n \ln^2 n} p^{1 - \frac{1}{9,3n^2 \ln n}}.$$

Доказательство.

$$|S_1| < \left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)} \right| + 2\pi p^{n+3} \max_{Q \leqslant z_1 \leqslant Q+p-1} \left| \frac{F^{(n+2)}(z_1)}{(n+2)!} \right|,$$

где $f(x)$ — многочлен со старшим коэффициентом, равным $\frac{F^{(n+1)}(Q)}{(n+1)!}$. Полученная сумма оценивается с помощью теоремы Виноградова ([1]).

Теорема 2. *Пусть*

$$S = \sum_{z=T+1}^{[|t|^{3/11}]} \frac{1}{(z+w)^s},$$

где $0 \leqslant w \leqslant 1$, $s = \sigma + ti$, σ *и* t — *действительные*, $T = [e^{2,2(\ln|t|)^{3/4}(\ln\ln|t|)^{3/4}}]$.

Тогда в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln|t|}}$$

справедлива оценка

$$|S| < \frac{1}{e^{0,05(\ln|t|)^{1/4}(\ln\ln|t|)^{5/4}}}.$$

Доказательство. Достаточно считать $t > e^{e^{40}}$. Разобьем интервал суммирования $(T, [t^{2/15}])$ на $r < \ln t$ частей точками $2T$, $4T, \ldots$ $\ldots, 2^{r-1}T$. Будем иметь

$$|S| < |S'| \ln t,$$

где

$$|S'| = \left| \sum_{z=N}^{N'} \frac{1}{(z+w)^s} \right| < N^{-\sigma} \max_{N \leqslant N'' \leqslant N'} \left| \sum_{z=N}^{N''} (z+w)^{ti} \right|,$$

причем $N \leqslant N' < 2N$. Пусть $N = t^u$, $n = \left[\frac{3}{2u}\right]$, $p = \left[8\left(\frac{N^{n+1}}{t}\right)^{1/n}\right]$. Имеем

$$\left| \sum_{z=N}^{N''} (z+w)^{ti} \right| < \frac{N}{p} |S_1| + p,$$

где

$$S_1 = \sum_{z=Q}^{Q+p-1} (z+w)^{ti}$$

и оценивается по теореме 1. Тогда

$$|S| < \left(e^{3n\ln^2 n} t^{u(1-\sigma) - \frac{u(n+1)-1}{9,3n^3\ln n}} + 8t^{u(1-\sigma) - \frac{1-u}{n}}\right) \ln t <$$

$$< \left(e^{0,128(\ln t)^{1/4}(\ln\ln t)^{5/4}} t^{-0,186\frac{(\ln\ln t)^{5/4}}{(\ln t)^{3/4}}} + 8t^{-\frac{(\ln\ln t)^{5/4}}{(\ln t)^{3/4}}}\right) \ln t < \frac{1}{e^{0,05(\ln t)^{1/4}(\ln\ln t)^{5/4}}}.$$

Теорема 3. *Пусть* $L(s, \chi)$ — *функция Дирихле, построенная с помощью характера* $\chi = \chi(a, k)$, *имеющего модулем число* k. *Пусть, далее,* $s = \sigma + ti$, $\gamma = |t| + 8$.

Тогда в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}$$

имеет место неравенство

$$|L(s, \chi)| < (k+3)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}} \ln(k+3)\, e^{2,4(\ln\gamma)^{1/4}(\ln\ln\gamma)^{3/4}},$$

причем, если данный характер χ — *главный, то следует исключить из вышеуказанной области круг*

$$|s - 1| < {}^1/_3.$$

Доказательство. Исходим из равенства

$$L(s, \chi) = \frac{1}{k^s} \sum_{a=1}^{k} \chi(a)\, \zeta\left(s, \frac{a}{k}\right), \tag{2}$$

причем

$$\zeta(s, w) = \frac{1}{(s-1)(m+w)^{s-1}} + \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{(n+w)^s} - \frac{1}{2(m+w)^s} - s\int_m^\infty \frac{u-[u]-{}^1/_2}{(u+w)^{s+1}}\, du, \tag{3}$$

где $m \geqslant 0$, $0 < w \leqslant 1$, $\sigma > 0$ (([2]), теоремы 368, 369).

1. $\gamma \leqslant e^4$. Положим в (3) $m = 0$, $w = \frac{a}{k}$ и подставим в (2), учитывая, что если $|s-1| < {}^1/_3$, то χ — неглавный характер и $\sum\limits_{a=1}^{k} \chi(a) = 0$.

2. $e^4 < \gamma < e^{e^{10}}$. Для доказательства достаточно положить в (3) $m = [\gamma]$, $w = \frac{a}{k}$.

3. $\gamma \geqslant e^{e^{10}}$. Считаем $t > 0$. Положим в (3) $m = [t^2]$, $w = \frac{a}{k}$, будем иметь при $\sigma > 2$

$$\left|\zeta\left(s, \frac{a}{k}\right)\right| < \frac{(t^2+1)^{\frac{1}{\sqrt{\ln\gamma}}}}{t} + \left(\frac{k}{a}\right)^\sigma + \left|\sum_{z=1}^{[t^{1/2}]} \frac{1}{(z+w)^s}\right| +$$

$$+ \left|\sum_{z=[t^{1/2}]+1}^{[t^2]} \frac{1}{(z+w)^s}\right| + \frac{1}{2(t^2-1)^\sigma} + \frac{t+2}{2\sigma(t^2-1)^\sigma}.$$

Здесь сумма первого и двух последних слагаемых < 3. Сумма $\sum\limits_{z=[t^{1/2}]+1}^{[t^2]} \frac{1}{(z+w)^s}$ оценивается с помощью теоремы 391 из книги ([2]). Для оценки $\sum\limits_{z=1}^{[t^{1/2}]} \frac{1}{(z+w)^s}$ положим

$$T_r = \left[t^{\frac{2}{r+2}}\right] \quad (r = 13,\ 12,\ 11, \ldots,\ 3,\ 2),$$

$T = [e^{2,2(\ln t)^{3/4}(\ln\ln t)^{3/4}}]$, и пусть $T_0 = T_{r_0}$ есть наибольшее из чисел T_r, не превосходящее T. Если же $T < T_{13}$, то положим $T_0 = T$, $r_0 = 13$. Будем иметь

$$\sum_{z=1}^{[t^{1/2}]} \frac{1}{(z+w)^s} = \sum_{z=1}^{T_0} \frac{1}{(z+w)^s} + \sum_{z=T_0+1}^{[t^{2/15}]} \frac{1}{(z+w)^s} + \sum_{r=3}^{r_0} \sum_{z=[t^{2/(r+2)}]+1}^{[t^{2/(r+1)}]} \frac{1}{(z+w)^s}.$$

Первая сумма, стоящая в правой части, оценивается тривиально, вторая — по теореме 2. Внутреннюю сумму в последнем слагаемом можно оценить, пользуясь теоремой 390 из книги ([2]).

Теорема 4. *Пусть $s = \sigma + ti$, где σ и t — действительные, $\gamma = |t| + 8$ и $L(s, \chi)$ — L-функция, построенная с помощью характера χ, имеющего данное число $k \geqslant 1$ своим модулем.*

Тогда $L(s, \chi) \neq 0$ в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{0{,}0005}{\ln(k+3) + (\ln\gamma)^{3/4}(\ln\ln\gamma)^{3/4}}$$

при условии, что $|t| \geqslant 1$ в случае, если χ — действительный характер, и t — любое, если χ — главный характер или характер третьего рода.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 40 из книги ([3]), если только положить в нем

$$\eta = \frac{0{,}003}{\ln(k+3) + (\ln\gamma)^{3/4}(\ln\ln\gamma)^{3/4}}$$

и взять радиусы указанных там кругов $R = \frac{0{,}9}{\sqrt{\ln\gamma}}$.

Саратовский государственный педагогический институт

Поступило 23 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Виноградов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 3 (1950). [2] E. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2, 1927. [3] Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L-функций Дирихле, 1947.