Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 2

МАТЕМАТИКА

С. В. ВАЛЛАНДЕР

О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 I 1953)

Обобщая ранее полученный результат [1], найдем и проинтегрируем все гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, имеющие общее решение вида

$$u = \overline{\Omega}\{x, y, \Phi_1[\alpha(x, y)], \ \Phi_2[\beta(x, y)]\}, \tag{1}$$

где u — искомая функция; Ω, α, β — некоторые фиксированные независимые функции; Φ_1 и Φ_2 произвольны.

Покажем, что для того, чтобы гиперболическое дифференциальное уравнение

$$\overline{F}\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{2}$$

имело общее решение вида (1), необходимо и достаточно соблюдение следующих условий:

I. Характеристики уравнения (1) не должны зависеть от рассматриваемого решения u.

II. После отнесения к характеристикам $\xi = \alpha(x, y)$, $\eta = \beta(x, y)$ и разрешения относительно смешанной производной $\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$ уравнение (2) должно приобретать вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + A\frac{\partial u}{\partial \xi} + B\frac{\partial u}{\partial \eta} + C\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} + D = 0, \tag{3}$$

где A, B, C и D — некоторые функции ξ, η, u.

III. Коэффициенты A, B, C и D уравнения (3) должны удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial A}{\partial \xi} + AB = \frac{\partial D}{\partial u} + CD, \quad \frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial C}{\partial \eta}, \\ &\frac{\partial B}{\partial \eta} + AB = \frac{\partial D}{\partial u} + CD, \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial C}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{4}$$

Кроме того, покажем, что если условия (I), (II) и (III) соблюдены, то общее решение u уравнения (3) находится как неявная функция из соотношения

$$N(\xi, \eta, u) = \Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta), \tag{5}$$

где Φ_1 и Φ_2 произвольны, а N фиксирована и находится из соотношения

$$\frac{\partial N}{\partial u} = e^{\int (A\,d\eta + B\,d\xi + C\,du)}, \tag{6}$$

в котором под знаком интеграла стоит полный дифференциал. При этом функция N должна быть определена (и всегда может быть определена) из (6) квадратурой таким образом, чтобы было справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 N}{\partial\xi\,\partial\eta} = D\frac{\partial N}{\partial u}. \tag{7}$$

1. Покажем сначала, что для того, чтобы уравнение (3) имело общее решение, определяемое формулой (5), необходимо и достаточно соблюдение равенств (4). Вычислим вторую смешанную производную по ξ и η от правой и левой частей равенства (5). Тогда получим, что u удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + \left(\frac{\partial}{\partial\eta}\ln\frac{\partial N}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi} + \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\ln\frac{\partial N}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial\eta} +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial u}\ln\frac{\partial N}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} + \frac{1}{\partial N/\partial u}\frac{\partial^2 N}{\partial\xi\,\partial\eta} = 0, \tag{8}$$

которое является уравнением вида (3) и в котором

$$A = \frac{1}{\partial N/\partial u}\frac{\partial^2 N}{\partial\eta\,\partial u}, \quad B = \frac{1}{\partial N/\partial u}\frac{\partial^2 N}{\partial\xi\,\partial u},$$
$$C = \frac{1}{\partial N/\partial u}\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}, \quad D = \frac{1}{\partial N/\partial u}\frac{\partial^2 N}{\partial\xi\,\partial\eta}. \tag{9}$$

Умножим равенства (9) на $\partial N/\partial u$, продифференцируем получившиеся равенства по переменным ξ, η, u и сравним между собой различные выражения для третьих производных функции N. Затем исключим вторые производные функции N при помощи (9). Тогда получим равенства (4), оказывающиеся необходимыми для того, чтобы (3) интегрировалось при помощи (5). Для доказательства достаточности условий (4) покажем, что при наличии (4) уравнение (3) всегда может быть записано в виде (8).

Три из равенств (4) можем записать в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial\xi} = \frac{\partial B}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial A}{\partial u} = \frac{\partial C}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial C}{\partial\xi}. \tag{10}$$

Следовательно, существует функция $\Phi(\xi, \eta, u)$, связанная с A, B и C соотношениями

$$A = \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}, \quad B = \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \quad C = \frac{\partial\Phi}{\partial u}. \tag{11}$$

При наличии (11) равенства (4) дают одно условие:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\xi\,\partial\eta} + \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = \frac{\partial D}{\partial u} + D\frac{\partial\Phi}{\partial u}. \tag{12}$$

Положим

$$\Phi = \ln\frac{\partial N'}{\partial u}. \tag{13}$$

Из (12) получим

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 N'}{\partial\xi\,\partial\eta} - D\frac{\partial N'}{\partial u}\right) = 0. \tag{14}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 N'}{\partial\xi\,\partial\eta} - D\frac{\partial N'}{\partial u} = S(\xi,\ \eta). \tag{15}$$

Введем $N(\xi, \eta, u)$ по формуле

$$N = N' - \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta} S(\xi,\ \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{16}$$

Тогда из (15), (13) и (11) получим равенства (9), связывающие N с A, B, C и D. Это доказывает достаточность условий (4) для интегрирования (3) в виде (5).

2. Докажем теперь справедливость утверждений (I) и (II).

Предположим, что функция $u(x, y)$, определяемая (1), удовлетворяет уравнению (2) при любых Φ_1 и Φ_2.

Произведем в (2) замену независимых переменных $\xi = \alpha(x, y)$, $\eta = \beta(x, y)$. Тогда из (2) получим некоторое уравнение

$$F\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta},\ \frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta},\ \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right) = 0, \tag{17}$$

которому при любых Φ_1 и Φ_2 будет удовлетворять функция u, определяемая формулой

$$u = \Omega\,[\xi,\ \eta,\ \Phi_1(\xi),\ \Phi_2(\eta)]. \tag{18}$$

Подставив (18) в (17), использовав независимость значений вторых производных Φ_1'' и Φ_2'' от значений Φ_1, Φ_2, Φ_1' и Φ_2' и учтя, что $\partial\Omega/\partial\Phi_1 \neq 0$ и $\partial\Omega/\partial\Phi_2 \neq 0$, без труда получим, что (17) должно иметь вид

$$F\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta},\ \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\right) = 0. \tag{19}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} - f\left(\xi,\ \eta,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0. \tag{20}$$

Подставив (18) в (20), получим тождество, которое при произвольных Φ_1 и Φ_2 возможно только в том случае, если (20) имеет вид (3). Это доказывает утверждения (I) и (II).

3. Для завершения рассмотрения покажем, что каждое уравнение вида (3), допускающее общее решение вида (18), обязано его иметь и в виде (5)*.

Подставим (18) в (3). Получим полином второй степени относительно величин Φ_1' и Φ_2', тождественно обращающийся в нуль. Приравнивая нулю коэффициент при $\Phi_1'\Phi_2'$, получим уравнение

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial\Phi_1\partial\Phi_2} + C(\xi,\ \eta,\ \Omega)\,\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi_1}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\Phi_2} = 0, \tag{21}$$

в котором ξ, η — параметры, а Φ_1 и Φ_2 — независимые переменные. Уравнение (21) имеет вид (3) и для него соблюдены условия (4). Поэтому его общее решение имеет вид

$$N(\xi,\ \eta,\ \Omega) = f_1(\Phi_1) + f_2(\Phi_2). \tag{22}$$

---

* Приводимым ниже кратким доказательством этого утверждения я обязан акад. В. И. Смирнову, которому и выражаю свою признательность.

Отсюда

$$N(\xi, \eta, u) = \Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta). \tag{23}$$

Следовательно, u находится из уравнения вида (5). Поэтому уравнение (20), имеющее вид (3), должно иметь такие коэффициенты A, B, C и D, для которых справедливы уравнения (4). Этим заканчивается доказательство всех высказанных утверждений.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Валландер, ДАН, 83, № 5 (1952).