

УДК 539.12

Матричный элемент распада мезона в лептонную пару

В.В. АНДРЕЕВ, В.Ю. ГАВРИШ

В работе представлена методика получения матричного элемента распада мезона с произвольным спином J в лептонную пару с учетом кварковой структуры.

Ключевые слова: лептон, мезон, пуанкаре-инвариантная квантовая механика, волновая функция, кварк.

The paper presents a technique to obtain the matrix element of meson decay with J arbitrary spins into a lepton pair in view of the quark structure.

Keywords: lepton, meson, Poincare-invariant quantum mechanics, wave function, quark.

Введение

Исследования электрослабых распадов адронов всегда были источником информации о взаимодействии кварков. Сегодня электрослабые распады адронов, которые содержат тяжелые кварки, дают возможность измерять параметры Стандартной Модели (СМ), а также служат для поисков эффектов новой физики, т. е. физики вне СМ. В частности, адронные распады позволяют определить элементы матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава, углы смешивания. Лептонные распады псевдоскалярных мезонов в моделях с двумя заряженными хиггсовскими бозонами становятся чувствительными к массам этих бозонов [1].

Вычисления лептонных распадов мезонов с учетом их кварковой структуры проделаны в различных подходах таких, как решеточные модели [2]–[9], модели, основанные на правилах сумм в КХД (см., например, [10]–[12]), и в моделях, использующих конституэнтную кварковую модель ([13]–[21], см. также обзор [22] и ссылки в нем). Результаты таких вычислений значительно отличаются друг от друга, и теоретические неопределенности расчетов достаточно велики. Кроме этого, для мезонов с тяжелым и легким кварком (B , B_s , D , D_s -мезоны) важно учитывать и релятивистские эффекты, которыми часто пренебрегают. Таким образом, развитие новых подходов, учитывающих релятивизм кварков и уменьшающих теоретические неопределенности вычислений лептонных распадов, актуально и в настоящее время.

Цель данной работы – разработка методики вычисления распада мезона в лептонную пару с учетом его кварковой структуры. Для описания составных релятивистских систем используется наиболее простое обобщение обычной квантовой механики – релятивистская гамильтонова динамика (РГД) или пуанкаре-инвариантная квантовая механика [24], [25]¹.

Матричный элемент распада $h(q\bar{Q}) \rightarrow \ell_1 + \ell_2$

Реакция распада мезона h в лептонную пару ℓ_1, ℓ_2

$$h \rightarrow \ell_1 + \ell_2 \quad (1)$$

характеризуется S -матричным элементом

$$M(h \rightarrow \ell_1 \ell_2) = {}_{out} \langle \ell_1, \ell_2 | S - I | \Psi_{Q,M,J,\mu} \rangle_{in}. \quad (2)$$

Здесь вектор

$$| \Psi_{Q,M,J,\mu} \rangle \quad (3)$$

определяет состояние мезона спина J , массы M и импульса \mathbf{Q} в представлении Гейзенберга [23].

¹Объем данной работы не позволяет даже кратко характеризовать имеющиеся в настоящее время модели для описания связанных систем. Описание некоторых подходов можно найти, например, в [26].

В данной работе будем рассматривать мезон h как релятивистскую составную систему кварка q и антикварка \bar{Q} в рамках пуанкаре-инвариантной квантовой механики [24], [25].

В таком подходе процесс распада (1) обусловлен взаимодействием кварков, входящих в мезон h . Поскольку при расчетах реакций с фермионами наиболее эффективным является использование спиральных состояний, а для описания связанных систем «хорошими» квантовыми числами являются орбитальный момент относительного движения ℓ и полный спиновый момент S , необходимо найти связь между вектором состояния (3) и векторами состояния пары $q\bar{Q}$ с учетом этих требований.

Пуанкаре-инвариантная квантовая механика дает возможность связать вектор состояния мезона (2) с векторами состояний входящих в него кварков на основе представлений группы Пуанкаре. Главным требованием пуанкаре-инвариантной квантовой механики является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц.

Схема решения поставленной задачи состоит в следующем: на первом этапе строится базис прямого произведения двух частиц без учета взаимодействия. В случае системы двух частиц с массами m_q и m_Q и, соответственно, с 4-импульсами $p_1 = (\omega_{m_q}(p_1), \mathbf{p}_1)$ и $p_2 = (\omega_{m_Q}(p_2), \mathbf{p}_2)$ этот базис

$$|\mathbf{p}_1, \lambda_1\rangle |\mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle \equiv |\mathbf{p}_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2\rangle \quad (4)$$

определяет приводимое представление группы Пуанкаре.

На втором этапе с помощью разложения Клебша-Гордана для группы Пуанкаре (см., например, [27], [28], [29]) строится базис неприводимого представления, который характеризует систему целиком. Для этого введем полный импульс

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (5)$$

и относительный импульс \mathbf{k} двух частиц

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{\tilde{M}_0(\omega_{\tilde{M}_0}(P) + \tilde{M}_0)} \left(m_Q^2 - m_q^2 - \tilde{M}_0 [\omega_{m_Q}(p_2) - \omega_{m_q}(p_1)] \right) \quad (6)$$

с

$$\tilde{M}_0 = \sqrt{[\omega_{m_Q}(p_2) + \omega_{m_q}(p_1)]^2 - \mathbf{P}^2}.$$

Базис двухчастичного неприводимого представления определяется квантовыми числами полного импульса (5), полного углового момента J , его проекцией μ , эффективной массой невзаимодействующих частиц

$$M_0 = \omega_{m_Q}(k) + \omega_{m_q}(k) \quad (7)$$

или $k = |\mathbf{k}|$, а также двумя дополнительными числами, которые снимают вырождение данного базиса.

В зависимости от выбора чисел, снимающих вырождение, различают две схемы: схема с «L-S» связью с квантовыми числами орбитального момента относительного движения ℓ и полного спинового момента S и схема «спиральность» с пуанкаре-инвариантными спиральностями $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ [28]. В системе центра инерции ($\mathbf{P} = 0$) числа $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ совпадают с обычными спиральностями фермионов.

В схеме «спиральность» разложение Клебша-Гордана группы Пуанкаре имеет вид [28]:

$$|\mathbf{P}, k, J, \mu, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\rangle = \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1) \omega_{m_Q}(p_2) M_0}{\omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k) \omega_{M_0}(P)}} \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int d^2\hat{\mathbf{k}} D_{\mu, \lambda}^{*J}(\phi_k, \theta_k, -\phi_k) |\mathbf{p}_1, \tilde{\lambda}_1; \mathbf{p}_2, \tilde{\lambda}_2\rangle \quad (8)$$

с $\lambda = \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2$. Функция $D_{\mu, \lambda}^J(\phi_k, \theta_k, -\phi_k)$ задает матрицы неприводимого представления группы $SU(2)$ индекса J . Явный вид матрицы D определяется через сферические углы вектора относительного движения (6) $\hat{\mathbf{k}} = \{\sin \theta_k \cos \phi_k, \sin \theta_k \sin \phi_k, \cos \theta_k\}$.

На третьем этапе от системы без взаимодействия переходят к одночастичному базису связанной системы (3) путем добавления в один из операторов полного набора базиса (8) оператора взаимодействия. Требование сохранения пуанкаре-инвариантности в рамках точечной и мгновенной форм РГД приводит к появлению волновой функции (ВФ) связанной системы Φ :

$$\langle \mathbf{P}, k, J, \mu, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 | \Psi_{\mathbf{Q}, M, J, \mu} \rangle = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \delta_{J, J'} \delta_{\mu, \mu'} \Phi_{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2}^{J, \mu}(k). \quad (9)$$

Нормировка ВФ (9) с учетом числа цветов кварков N_c следует из нормировки векторов состояний и имеет вид

$$N_c \int_0^\infty dk k^2 |\Phi_{\ell, S}^{J, \mu}(k)|^2 = 1. \quad (10)$$

Использование соотношения, связывающего вектор состояния в схеме с «L-S» связью с вектором состояния в схеме «спиральность» [28], [30]

$$|\mathbf{P}, k, J, \mu, \ell, S\rangle = \sum_{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{2J+1}} C_{\tilde{\lambda}_1}^{s_1} C_{-\tilde{\lambda}_2}^{s_2} C_{\lambda}^{S, \ell} C_{\lambda}^{S, J} |\mathbf{P}, k, J, \mu, \tilde{\lambda}_1, -\tilde{\lambda}_2\rangle, \quad (11)$$

где $C_{\lambda}^{s_1} C_{\lambda}^{s_2} C_{\lambda}^S$ – коэффициенты Клебша-Гордана, приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\mathbf{P}, J, \mu, M}\rangle &= \int_0^\infty dk k^2 \Phi_{\ell, S}^{J, \mu}(k) \sqrt{\frac{\omega_{m_1}(p_1) \omega_{m_2}(p_2) M_0}{\omega_{m_1}(k) \omega_{m_2}(k) \omega_{M_0}(P)}}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \times \\ &\times \sum_{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2} C_{\tilde{\lambda}_1}^{1/2} C_{-\tilde{\lambda}_2}^{1/2} C_{\lambda}^{S, \ell} C_{\lambda}^{S, J} \int d^2\mathbf{k} D_{\mu\lambda}^{*J}(\phi_k, \theta_k, -\phi_k) |\mathbf{p}_1, \tilde{\lambda}_1, \mathbf{p}_2, \tilde{\lambda}_2\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя (12) в матричный элемент (2), после ряда упрощений в системе покоя мезона ($\mathbf{P} = 0$) находим, что

$$\begin{aligned} M(h \rightarrow \ell_1 \ell_2) &= \sum_{a=1}^{N_c} \int_0^\infty dk k^2 \Phi_{\ell, S}^{J, \mu}(k) \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} C_{\lambda_1}^{1/2} C_{-\lambda_2}^{1/2} C_{\lambda}^{S, \ell} C_{\lambda}^{S, J} \times \\ &\times \int d^2\mathbf{k} D_{\mu\lambda}^{*J}(\phi_k, \theta_k, -\phi_k)_{out} \langle \ell_1, \ell_2 | S - I | \mathbf{k}, \lambda_1; -\mathbf{k}, \lambda_2, a \rangle_{in}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь уже λ_1 и λ_2 – спиральности кварка и антикварка, а волновая функция мезона определяется «хорошими» квантовыми числами ℓ и S , которые, в свою очередь, задают значения операторов P , C и G -четности.

Таким образом, матричный элемент распада мезона спина J в лептонную пару выражается через матричный элемент субпроцесса с участием кварков, входящих в этот мезон $M(q\bar{Q} \rightarrow \ell_1 \ell_2)$.

Пример: распад $\pi^- (d\bar{u}) \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$

Для демонстрации методики рассмотрим процесс лептонного распада псевдоскалярного мезона $\pi^- (d\bar{u}) \rightarrow e^- (q_1, \sigma_1) + \bar{\nu}_e (q_2, \sigma_2)$ в стандартной теории электрослабого взаимодействия. Поскольку для пиона $J = S = \ell = 0$, то выражение (13) существенно упрощается

$$M^{\sigma_1, \sigma_2}(\pi^- \rightarrow e^- \nu_e) = \sum_{a=1}^{N_c} \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \int_0^\infty dk k^2 \Phi_\pi(k) \int d^2\mathbf{k} \sum_{\lambda} \lambda M_{\lambda, \lambda}^{\sigma_1, \sigma_2}(d\bar{u} \rightarrow e^- \nu_e). \quad (14)$$

В борновском приближении субпроцесс с участием кварков определяется диаграммой с обменом заряженным W -бозоном. Матричный элемент, соответствующий данному субпроцессу, можно записать в виде

$$\begin{aligned} M_{\lambda, \lambda}^{\sigma_1, \sigma_2}(d\bar{u} \rightarrow e^- \nu_e) &= \frac{\sqrt{2} V_{ud} N_c G_F}{(2\pi)^3 \sqrt{\omega_{m_d}(k) \omega_{m_u}(k)}} \frac{M_W^2}{M_W^2 - M_\pi^2} \times \\ &\times \bar{u}_{\lambda}(-\mathbf{k}, m_u) \gamma_\mu \omega_{-u_\lambda}(\mathbf{k}, m_d) \bar{u}_{\sigma_1}(\mathbf{q}, m_e) \gamma^\mu \omega_{-\nu_{\sigma_2}}(-\mathbf{q}, 0), \end{aligned} \quad (15)$$

где V_{ud} – элемент матрицы Кабиббо-Кобаяши-Маскава; M_W – масса W -бозона; M_π – масса π^- -мезона; $\omega_\pm = (1 \pm \gamma_5)/2$ – проективная матрица; а m_u и m_d – массы u и d -кварков соответственно.

В выражении (15) учтена кинематика двухчастичного распада, а именно, что

$$q_1 + q_2 = M_{\pi^-}, \quad \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = 0, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q}, \quad (16)$$

а также, что постоянная тонкой структуры α , синус угла Вайнберга s_W и константа Ферми G_F связаны соотношением

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}s_W^2 M_W^2 G_F}{\pi}. \quad (17)$$

Подстановка (15) в матричный элемент (14) приводит к выражению

$$M^{\sigma_1, \sigma_2}(\pi^- \rightarrow e^- \nu_e) = \frac{\sqrt{2} V_{ud} N_c G_F}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{1}{8\pi} \frac{M_W^2}{M_W^2 - M_\pi^2}} \times \\ \times \bar{u}_{\sigma_1}(\mathbf{q}, m_e) \gamma^\mu \omega_{\nu_{\sigma_2}}(-\mathbf{q}, 0) \int_0^\infty dk \frac{k^2 \Phi_\pi(k)}{\sqrt{\omega_{m_d}(k) \omega_{m_u}(k)}} \int d^2\mathbf{k} \sum_\lambda \lambda \bar{v}_\lambda(-\mathbf{k}, m_u) \gamma_\mu \omega_{u_\lambda}(\mathbf{k}, m_d). \quad (18)$$

Таким образом, соотношение (18) позволяет рассчитать матричный элемент лептонного распада $\pi^- (d\bar{u}) \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ с учетом кварковой структуры π^- -мезона. Фермионные токи, входящие в (18), можно рассчитать на основе метода базисных спиноров, развитого одним из авторов в [31], [32].

Волновая функция мезона $\Phi(k)$ находится из уравнения пуанкаре-инвариантной механики [24]:

$$\sum_{\ell', S'} \int_0^\infty V_{\ell, S; \ell', S'}^J(k, k') \Phi_{\ell', S'}^{J\mu}(k') k'^2 dk' = (M - M_0) \Phi_{\ell, S}^{J\mu}(k), \quad (19)$$

где $V_{\ell, S; \ell', S'}^J(k, k')$ – матричный элемент феноменологического потенциала межкваркового взаимодействия V .

Заключение

В работе представлена методика получения матричного элемента распада мезона с произвольным спином J в лептонную пару с учетом кварковой структуры. Двухчастичная релятивистская связанная система $q\bar{Q}$ описывается на основе пуанкаре-инвариантной квантовой механики (или РГД), что позволяет сделать задачу расчета замкнутой. Авторы планируют применить развитую методику для расчета редких лептонных распадов мезонов.

Литература

1. Hou, W.-S. Enhanced charged Higgs boson effects in $B^- \rightarrow \tau^- \bar{\nu}_\tau$, $\mu^- \bar{\nu}_\mu$ and $b \rightarrow \tau^- \bar{\nu}_\tau + X$ / W.-S. Hou // Phys. Rev. – 1993. – Vol. D48. – P. 2342–2344.
2. Quenched heavy light decay constants / R.M. Baxter [et al.] // Phys. Rev. – 1994. – Vol. D49. – P. 1594–1605.
3. B -meson decay constants from NRQCD / A. Ali Khan [et al.] // Phys. Lett. – 1998. – Vol. B427. – P. 132–140.
4. Lattice determination of heavy-light decay constants / C.W. Bernard [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81. – P. 4812–4815.
5. Non-perturbatively improved heavy-light mesons: Masses and decay constants / D. Becirevic [et al.] // Phys. Rev. – 1999. – Vol. D60. – P. 074501.
6. Draper, T. Status of heavy quark physics on the lattice / T. Draper // Nucl. Phys. Proc. Suppl. – 1999. – Vol. 73. – P. 43–57.
7. B -meson decay constant from two-flavor lattice QCD with non-relativistic heavy quarks / A. Ali Khan [et al.] // Phys. Rev. – 2001. – Vol. D64. – P. 054504.

8. Decay constants of B and D mesons from improved relativistic lattice QCD with two flavours of sea quarks / A. Ali Khan [et al.] // *Phys. Rev.* – 2001. – Vol. D64. – P. 034505.
9. Lattice results for the decay constant of heavy-light vector mesons / C. Bernard [et al.] // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. D65. – P. 014510.
10. Narison, S. Extracting $m\text{-}\bar{c}(M(c))$ and $f(D/s, B)$ from the pseudoscalar sum rules / S. Narison // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* – 1999. – Vol. 74. – P. 304–308.
11. Jamin, M. $f(B)$ and $f(B/s)$ from QCD sum rules / M. Jamin, B.O. Lange // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. D65. – P. 056005.
12. Penin, A.A. Heavy-light meson decay constant from QCD sum rules in three-loop approximation / A.A. Penin, M. Steinhauser // *Phys. Rev.* – 2002. – Vol. D65. – P. 054006.
13. Colangelo, P. Relativistic bound-state effects in heavy-meson physics / P. Colangelo, G. Narduli, M. Pietroni // *Phys. Rev.* – 1991. – Vol. D43, N9. – P. 3002–3010.
14. Ivanov, M.A. Leptonic and semileptonic decays of pseudoscalar mesons / M.A. Ivanov, P. Santorelli // *Phys. Lett.* – 1999. – Vol. B456. – P. 248–255.
15. Ciftci, H. Meson decay in an independent quark model / H. Ciftci, H. Koru // *Int. J. Mod. Phys.* – 2000. – Vol. E9. – P. 407–416.
16. Melikhov, D. Weak form factors for heavy meson decays: An update / D. Melikhov, B. Stech // *Phys. Rev.* – 2000. – Vol. D62. – P. 014006.
17. Decay constants of heavy meson of 0- state in relativistic Salpeter method / G. Cvetic, C.S. Kim, G.-L. Wang, W. Namgung // *Phys. Lett.* – 2004. – Vol. B596. – P. 84–89.
18. Weak decay constant of pseudoscalar mesons in a QCD-inspired model / L.A.M. Salcedo, J.P.B.C. de Melo, D. Hadjmichef, T. Frederico // *Braz. J. Phys.* – 2004. – Vol. 34. – P. 297–299.
19. Ebert, D. Decay constants of heavy-light mesons in the relativistic quark model / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // *Mod. Phys. Lett.* – 2002. – Vol. A17. – P. 803–808.
20. Leptonic decay constants $f(D/s)$ and $f(D)$ in three flavor lattice QCD / J.N. Simone [et al.] // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* – 2005. – Vol. 140. – P. 443–445.
21. Ebert, D. Relativistic treatment of the decay constants of light and heavy mesons / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // *Phys. Lett.* – 2006. – Vol. B635. – P. 93–99.
22. Richman, J.D. Leptonic and semileptonic decays of charm and bottom hadrons / J.D. Richman, P.R. Burchat // *Rev. Mod. Phys.* – 1995. – Vol. 67. – P. 893–976.
23. Биленький, С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – М. : Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.
24. Keister, B.D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // *Adv. Nucl. Phys.* – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.
25. Крутов, А.Ф. Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // *ЭЧАЯ.* – 2009. – Т. 40, 2. – С. 268–318.
26. Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантово-полевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2008. – 294 с.
27. Широков, Ю.М. Релятивистская теория поляризованных эффектов / Ю.М. Широков // *ЖЭТФ.* – 1958. – Т. 34, 4. – С. 1005–1011.
28. Верле, Ю. Релятивистская теория реакций / Ю. Верле. – М. : Атомиздат, 1969. – 442 с.
29. Новожилов, Ю.В. Введение в теорию элементарных частиц / Ю.В. Новожилов. – М. : Наука, 1972. – 472 с.
30. Браун, Д.Е. Нуклон-нуклонные взаимодействия / Д.Е. Браун, А.Д. Джексон. – М. : Атомиздат, 1979. – 248 с.
31. Андреев, В.В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В.В. Андреев // *Ядерная физика.* – 2003. – Т. 66, 2. – С. 410–420.
32. Андреев, В.В. Методы вычисления амплитуд в квантово-полевых теориях и моделях / В.В. Андреев. – Гомель : УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2004. – 235 с.