Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6(81), 2013

УДК 593.12

Константа радиационного распада векторного мезона в пуанкаре-инвариантной квантовой механике

В.Ю. Гавриш, В.В. Андреев

В работе представлена универсальная схема получения интегральной формы константы радиоактивных распадов векторных мезонов с учетом их кварковой структуры в рамках пуанкаре-инвариантной квантовой механики.
Ключевые слова: радиационный распад, мезон, кварк, релятивистская гамильтонова динамика.

This paper presents the technique for obtaining the integral representation of radioactive decays constants of vector mesons in the view of their quark structure using Poincare-invariant quantum mechanics.
Keywords: radioactive decay, meson, quark, relativistic Hamiltonian dynamics.

Введение. В настоящее время изучение и вычисление констант радиационных распадов векторных мезонов является мощным аппаратом для исследования кварковой структуры адронов. Вычисление матричных элементов таких процессов является хорошим инструментом для извлечения форм-факторов частиц, констант взаимодействия, углов Кабибо и т.д.

Вычисления процессов радиационных распадов осуществлялись в различных моделях: линейной сигма-модели [1], КХД на решетке [2], [3], в динамике на световом фронте [4], [5]. Отметим, что вычисление констант распадов в рамках пертрубативной КХД в различных подходах и моделях хорошо согласуются с экспериментальными данными, а теоретическое выражение для ширины распада [6], [7]

$$\Gamma = \frac{1}{3}\alpha\, g_{VP\gamma}^{2}\left(\frac{M^{2}-M'^{2}}{2M}\right)^{3} \tag{1}$$

с достаточной точностью предсказывает ширину распада, измеренную в экспериментах [5].

Цель данной работы – вычислить интегральное представление константы распада векторного мезона $V(Q,M)\,(\ell=0, J=S=1)\rightarrow\ P(Q^{/},M^{/})\,(J=\ell=0,S=0)+\gamma$ в рамках пуанкаре-инвариантной квантовой механики или релятивистской гамильтоновой динамики (РГД) [8], [9]. Данная модель имеет преимущества перед другими моделями, так как позволяет строить векторы состояний мезонов, используя полный и относительный импульс входящих в него кварков.

Распад $V(Q,M)\rightarrow P(Q^{/},M^{/})+\gamma$ **в РГД.** Выражение для константы распада может быть параметризовано с помощью 4 скоростей начального и конечного мезона следующим выражением [5], [10]:

$$g_{VP\gamma}K^{\alpha}(\mu) = (2\pi)^{3}\frac{\sqrt{4\omega_{M}(Q)\omega_{M^{/}}(Q^{/})}}{MM^{/}}\,{}_{P}\left\langle \vec{Q}'\right|J^{\alpha}\left|\vec{Q}\right\rangle_{V}, \tag{2}$$

где введено обозначение $K^{\alpha}(\mu)=\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\nu}(\mu)V_{\rho}V_{\sigma}^{/}$.

В данной работе будем рассматривать мезоны $V(Q,M)$ и $P(Q^{/},M^{/})$ как релятивистскую составную систему кварка q и антикварка $\overline{Q}$ в рамках Пуанкаре-инвариантной квантовой механики [8], [9]. При таком подходе данный распад обусловлен испусканием кварком γ кванта, входящего в мезон V. Поскольку пуанкаре-инвариантная квантовая механика дает возможность связать векторы состояния мезонов с векторами состояний, входящих в него кварков $p_1=(\omega_{m_q}(p_1),\vec{p}_1)$ и $p_2=(\omega_{m_{\overline{Q}}}(p_2),\vec{p}_2)$, построим базис прямого произведения двух кварков массами m_q и $m_{\overline{Q}}$ спиральностями λ_1 и λ_2:

$$\left|\vec{p}_1,\lambda_1\right\rangle\left|\vec{p}_2,\lambda_2\right\rangle \equiv \left|\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2\right\rangle. \tag{3}$$

Используя разложение Клебша-Гордона группы Пуанкаре для схемы с «*L-S*» связью [9], запишем векторы начального и конечного, используя полный $\vec{Q}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$ и относительный импульс двух кварков

$$\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{p}_1+\vec{p}_2)+\frac{\vec{Q}}{\widetilde{M}_0(\omega_{\widetilde{M}_0}(Q)+\widetilde{M}_0)}\left(m_{\overline{Q}}^2-m_q^2-\widetilde{M}_0[\omega_{m_{\overline{Q}}}(p_2)-\omega_{m_q}(p_1)]\right) \tag{4}$$

$$\left|\vec{Q}\right\rangle_V=\int d\vec{k}\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1)\omega_{m_{\overline{Q}}}(p_2)M}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_{\overline{Q}}}(k)\omega_{M_0}(Q)}}\frac{\Psi^{\mu}(k)}{2\sqrt{\pi}}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{\nu_1,\nu_2}C^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}_{\nu_1,\nu_2,\mu}D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}(\vec{n}_{W_1})D^{1/2}_{\lambda_2,\mu-\nu_1}(\vec{n}_{W_2})\left|\vec{p}_1,\lambda_1;\vec{p}_2,\lambda_2\right\rangle, \tag{5}$$

$$\left|\vec{Q}'\right\rangle_P=\int d\vec{k}'\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1')\omega_{m_{\overline{Q}}}(p_2')M'}{\omega_{m_q}(k')\omega_{m_{\overline{Q}}}(k')\omega_{M_0'}(Q')}}\frac{\Phi(k')}{2\sqrt{\pi}}\sum_{\lambda_1',\lambda_2'}\sum_{\nu_1',\nu_2'}C^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\nu_1',\nu_2',0}D^{1/2}_{\lambda_1',\nu_1'}(\vec{n}'_{W_1})D^{1/2}_{\lambda_2',-\nu_1'}(\vec{n}'_{W_2})\left|\vec{p}_1',\lambda_1';\vec{p}_2',\lambda_2'\right\rangle \tag{6}$$

с коэффициентами Клебша-Гордона [11]:

$$C^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},1}_{\nu_1,\nu_2,\mu}=\frac{\sqrt{3-4\nu_1\nu_2}}{2}\delta_{\mu,\nu_1+\nu_2},\ C^{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0}_{\nu_1',\nu_2',0}=\sqrt{2}\nu_1'\delta_{\nu_1',-\nu_2'}. \tag{7}$$

Соблюдение требований пуанкаре-инвариантности в рамках точечной формы РГД в выражениях (6) и (7) привело к появлению волновых функции векторного $\Psi_{\mu}(k)$ и скалярного $\Phi(k')$ мезона как связанных систем, которые с учетом числа цветов кварков N_C нормированы выражением

$$N_C\int_0^{\infty}d\vec{k}\vec{k}^2\left|\Psi_{\mu}(k)\right|^2=N_C\int_0^{\infty}d\vec{k}'\vec{k}'^2\left|\Phi(k')\right|^2=1. \tag{8}$$

Подстановка оператора электромагнитного тока

$$\hat{J}^{\mu}=\overline{\psi}_Q(x)\gamma^{\mu}\psi_q(x) \tag{9}$$

в выражение (2) с использованием выражения (5) и (6) приводит к формуле для константы распада в рамках РГД:

$$\begin{gathered}
g_{VP\gamma}K^{\alpha}=\frac{(MM')}{2\pi}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}\sum_{\nu_1,\nu_2}\sum_{\lambda_1',\lambda_2'}\sum_{\nu_1',\nu_2'}\iint d\vec{k}d\vec{k}'\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1)\omega_{m_{\overline{Q}}}(p_2)M}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_{\overline{Q}}}(k)}}\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(p_1')\omega_{m_{\overline{Q}}}(p_2')M'}{\omega_{m_q}(k')\omega_{m_{\overline{Q}}}(k')}}\sqrt{\frac{3-4\nu_1\nu_2}{2}}\nu_1'\delta_{\mu,\nu_1+\nu_2}\delta_{\nu_1',-\nu_2'}\\
\Psi_{\mu}(k)\Phi(k')(\frac{D^{*1/2}_{\lambda_1',\nu_1'}(\vec{n}'_{W_1})\overline{u}_{\lambda_1'}(\vec{p}_1',m_q)\gamma^{\alpha}D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}(\vec{n}_{W_1})u_{\lambda_1}(\vec{p}_1,m_q)}{\sqrt{4\omega_{m_q}(p_1')\omega_{m_q}(p_1)}}D^{*1/2}_{\lambda_2',-\nu_1'}(\vec{n}'_{W_2})\left\langle\vec{p}_2',\lambda_2'\mid\vec{p}_2,\lambda_2\right\rangle D^{1/2}_{\lambda_2,\mu-\nu_1}(\vec{n}_{W_2})+\\
+\frac{D^{*1/2}_{\lambda_2',-\nu_1'}(\vec{n}'_{W_2})\overline{\upsilon}_{\lambda_2'}(\vec{p}_2',m_{\overline{Q}})\gamma^{\alpha}D^{1/2}_{\lambda_2,\mu-\nu_1}(\vec{n}_{W_2})\upsilon_{\lambda_2}(\vec{p}_2,m_{\overline{Q}})}{\sqrt{4\omega_{m_{\overline{Q}}}(p_2)\omega_{m_{\overline{Q}}}(p_2')}}D^{*1/2}_{\lambda_1',\nu_1'}(\vec{n}'_{W_1})\left\langle\vec{p}_1',\lambda_1'\mid\vec{p}_1,\lambda_1\right\rangle D^{1/2}_{\lambda_1,\nu_1}(\vec{n}_{W_1})).
\end{gathered} \tag{10}$$

Для дальнейшего упрощения выражения (9) воспользуемся формулой преобразования биспиноров Дирака [9,12]

$$B(\vec{u}_Q)u_{\lambda}(\vec{k},m)=\sum_{\sigma}D^{1/2}_{\sigma,\lambda}(\vec{n}_W(\vec{k},\vec{Q}))u_{\sigma}(\vec{p},m),\qquad p=L(\vec{u}_Q)k, \tag{11}$$

где

$$\vec{n}_W(\vec{k},\vec{Q})=\frac{\left[\vec{u}_k\vec{u}_Q\right]}{1+(\vec{u}_k\vec{u}_Q)},\qquad \vec{u}_Q=\frac{\vec{Q}}{\omega_M(\vec{Q})+M}, \tag{12}$$

и законом преобразования векторов состояния

$$\sum_{\sigma}D^{1/2}_{\sigma,\lambda}(\vec{n}_W)\mid\vec{p},\sigma\rangle=\sqrt{\frac{\omega_m(k)}{\omega_m(p)}}U(\vec{u}_Q)\mid\vec{k},\lambda\rangle. \tag{13}$$

После ряда упрощений для выражения (9) окончательно получаем:

$$g_{VP\gamma}K^{\alpha}(\mu)=-\frac{(\sqrt{MM'})^{-1}}{4\pi}\sum_{\nu_2,\nu_2'}\iint d\vec{k}d\vec{k}'\sqrt{\frac{3-4\nu_1(\mu-\nu_1)}{2}}\nu_2'\Psi_{\mu}(k)\Phi(k')\times$$

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_q'}(k')}}e_q\bar{u}_{-\nu_2'}(\vec{k}',m_q)B^{-1}(\vec{u}_{Q'})\gamma^\alpha B(\vec{u}_Q)u_{\mu-\nu_1}(\vec{k},m_q)\left\langle -\vec{k}',-\nu_1'\,|\,U^+(\vec{u}_{Q'})U(\vec{u}_Q)\,|-\vec{k},\mu-\nu_1\right\rangle +\\
&+\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_{\bar{Q}}}(k)\omega_{m_{\bar{Q}}'}(k')}}e_{\bar{Q}}\bar{\upsilon}_{\mu-\nu_1}(-\vec{k},m_{\bar{Q}})B^{-1}(\vec{u}_{Q'})\gamma^\alpha B(\vec{u}_Q)\upsilon_{-\nu_1'}(-\vec{k}',m_{\bar{Q}})\left\langle \vec{k}',-\nu_2'\,|\,U^+(\vec{u}_{Q'})U(\vec{u}_Q)\,|\,\vec{k},\mu-\nu_2\right\rangle).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Отметим, что константа распада $g_{VP\gamma}$ в выражении (13) является функцией от проекции полного углового момента μ векторного мезона V.

Вычисление константы распада $g_{VP\gamma}$ в системе Брейта. Выражение (13) наиболее просто вычисляется в обобщенной системе Брейта, для которой справедливо

$$\vec{V}_{\bar{Q}}+\vec{V}'_{Q'}=0\,, \tag{15}$$

где $\vec{V}_{\bar{Q}}$ и $\vec{V}'_{Q'}$ соответственно скорость начального и конечного мезона. В такой системе автоматически следует, что

$$B(\vec{u}_{Q'})=B(-\vec{u}_Q)\,. \tag{16}$$

Выбрав пространственную систему координат так, чтобы $\vec{V}_{\bar{Q}}$ был направлен вдоль оси Z [9], [13], т.е.

$$\vec{V}_{\bar{Q}}=\left\{V_0,0,0,|\,\vec{V}_Q\,|\right\},\vec{V}_{\bar{Q}}=\left\{V_0,0,0,-|\,\vec{V}_{\bar{Q}}\,|\right\}, \tag{17}$$

запишем в явном виде вектор $K^\alpha(\mu)$:

$$K^\alpha(\mu)=\left\{0,i\mu\sqrt{2}\left|\vec{V}_Q\right|V_0,\sqrt{2}\left|\vec{V}_Q\right|V_0,0\right\}. \tag{18}$$

Используя свойства бустов для биспиноров Дирака

$$B(\vec{u}_Q)B(\vec{u}_Q)=B(\vec{\upsilon}_Q)=\hat{V}_Q\,\gamma^0 \tag{19}$$

и то, что в данной системе

$$B^{-1}(\vec{u}_{Q'})(K\gamma)=(K\gamma)B(\vec{u}_Q)\,, \tag{20}$$

добиваемся наиболее компактной записи выражения (14):

$$
\begin{aligned}
&g_{VP\gamma}K^\alpha(\mu)=-\frac{(\sqrt{MM'})^{-1}}{4\pi}\sum_{\nu_2,\nu_2'}\int\!\!\int d\vec{k}d\vec{k}'\sqrt{\frac{3-4\nu_1(\mu-\nu_1)}{2}}\nu_2'\Psi_\mu(k)\Phi(k')\times\\
&(\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_q}(k')}}e_q\bar{u}_{-\nu_2'}(\vec{k}',m_q)\gamma^\alpha\,\hat{V}_Q\,\gamma^0u_{\mu-\nu_1}(\vec{k},m_q)\left\langle -\vec{k}',-\nu_1'\,|\,U(\vec{\upsilon}_Q)\,|-\vec{k},\mu-\nu_1\right\rangle +\\
&+\sqrt{\frac{1}{\omega_{m_{\bar{Q}}}(k)\omega_{m_{\bar{Q}}}(k')}}e_{\bar{Q}}\bar{\upsilon}_{\mu-\nu_1}(-\vec{k},m_{\bar{Q}})\gamma^\alpha\,\hat{V}_{Q'}\,\gamma^0\upsilon_{-\nu_1'}(-\vec{k}',m_{\bar{Q}})\left\langle \vec{k}',-\nu_2'\,|\,U(\vec{\upsilon}_Q)\,|\,\vec{k},\mu-\nu_2\right\rangle).
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Используя закон преобразования векторов состояний (13) и вводя векторы k_1 и k_2, которые задаются уравнениями

$$k_1=\begin{pmatrix}\omega_{m_{\bar{Q}}}(k_1)\\ \vec{k}_1\end{pmatrix}=\Lambda_{-\vec{\upsilon}_Q}\begin{pmatrix}\omega_{m_{\bar{Q}}}(k)\\ -\vec{k}\end{pmatrix},\ k_2=\begin{pmatrix}\omega_{m_q}(k_2)\\ \vec{k}_2\end{pmatrix}=\Lambda_{-\vec{\upsilon}_Q}\begin{pmatrix}\omega_{m_q}(k)\\ \vec{k}\end{pmatrix}, \tag{22}$$

а также условие ортогональности векторов состояний, после ряда упрощений из (21) окончательно получаем:

$$
\begin{aligned}
&g_{VP\gamma}K^\alpha(\mu)=-\frac{(\sqrt{MM'})^{-1}}{4\pi}\sum_{\nu_2,\nu_2'}\int d\vec{k}\sqrt{\frac{3-4\nu_1(\mu-\nu_1)}{2}}\nu_2'\Psi_\mu(k)(k)\Phi(k')\times\\
&(\sqrt{\frac{\omega_{m_{\bar{Q}}}(k_2)}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_q}(k_2)\omega_{m_{\bar{Q}}}(k)}}e_q\bar{u}_{-\nu_2'}(\vec{k}_2,m_q)\gamma^\alpha\,\hat{V}_Q\,\gamma^0u_{\mu-\nu_1}(\vec{k},m_q)D^{1/2}_{-\nu_1',\mu-\nu_1}(\vec{n}_{W_2}(\vec{k},\vec{\upsilon}_Q))+\\
&+\sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k_1)}{\omega_{m_{\bar{Q}}}(k)\omega_{m_{\bar{Q}}}(k_1)\omega_{m_q}(k)}}e_{\bar{Q}}\bar{\upsilon}_{\mu-\nu_1}(-\vec{k}_1,m_{\bar{Q}})\gamma^\alpha\,\hat{V}_Q\,\gamma^0\upsilon_{-\nu_1'}(-\vec{k}',m_{\bar{Q}})D^{1/2}_{-\nu_2',\mu-\nu_2}(\vec{n}_{W_1}(-\vec{k},\vec{\upsilon}_Q))).
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Выражение (23) и есть интегральное представление константы радиационного распада. Отметим, что векторы-параметры вигнеровских вращений в выражении (23) имеет вид:

$$\vec{n}_{W_1}(-\vec{k},\vec{\upsilon}_Q) = -\frac{[\vec{u}_{k_1}\vec{\upsilon}_Q]}{1-(\vec{u}_{k_1}\vec{\upsilon}_Q)},\ \vec{n}_{W_2}(\vec{k},\vec{\upsilon}_Q) = -\frac{[\vec{u}_{k_2}\vec{\upsilon}_Q]}{1-(\vec{u}_{k_2}\vec{\upsilon}_Q)}\ . \qquad (24)$$

Заключение. В работе представлена методика расчета интегрального выражения константы распада процесса $V(Q,M) \to P(Q^{/},M^{/})+\gamma$ с учетом кварковой структуры мезонов для точечной формы РГД. Авторами планируется дальнейшее вычисление интегралов с учетом явного вида волновых функций векторного и скалярного мезона и непосредственное вычисление наблюдаемых на опыте величин для данного процесса и различных спектров масс начальных и конечных мезонов.

Литература

1. Napsuciale, M. Radiative decays of light vector mesons in a quark level linear sigma model / M. Napsuciale, S. Rodriguez // Phys. Rev. D67. – 2003. – P. 1–8.

2. Shintani, E. Two-photon decay of $\pi^0 \to 2\gamma$ from two-flavor lattice QCD / E. Shintani, S. Aoki and S. Hashimoto // Proceedings of science – 2010. – P. 1–7.

3. Lin H.-W. Neutral Meson Decays into Two Photons from Lattice QCD / Huey-Wen Lin, Cohen, Saul D. Saul // Proceedings of science – 2012. – P. 1–8.

4. Choi, Ho-Meoyng Decay constants and radiative decays of heavy mesons in light-front quark model / Choi Ho-Meoyng // Phys. Rev. D. 75. – 2007. – P. 1–9.

5. Jaus, W. Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons / W. Jaus // Phys. Rev. D. 44 – 1991. – P. 2851–2859.

6. Zhuang, T.-L. Radiative decay of vector mesons / T.-L. Zhuang, M.-L. Yan, X.-J. Wang // Phys. Rev. D. 62 – 2000. – P. 1–12.

7. Berg, D. Radiative Decay of the $K^{*(890)}$ / D. Berg, C. Chandlee, S. Cihangir, S. // Phys. Lett. B 98. – 1981. – P. 119–122.

8. Keister, B. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // Advanced Nuclear Physics V. 20 – 1991. – P. 225–479.

9. Андреев, В.В. Пуанкаре – ковариантные модели двухчастных систем к квантово-полевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 294 с.

10. Morpurgo, G. General parametrization of the $V \to P\gamma$ meson decays / Phys. Rev. D. 42– 1990. – P. 1497–1508.

11. Варшалович Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский // Ленинград : Издательство «Наука», 1975. – 439 с.

12. Пилькун, Х. Физика релятивистских частиц / Х. Пилькун // Москва : Мир, 1975. – 542 с.

13. Хелзен Ф. Кварки и лептоны: Введение в физику частиц : пер. с англ. // М. : Мир, 1987. – 456 с.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 11.11.2013