Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 1

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. В. ГАПОНОВ

ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 29 XII 1952)

Одним из наиболее общих методов составления уравнений движения является «метод наложения идеальных связей», заключающийся, как известно (см., например, [1]), в том, что: а) рассматриваемому классу динамических систем сопоставляется некоторая «исходная» система, уравнения движения которой известны, и б) указываются идеальные (т. е. не совершающие работы) связи, наложение которых переводит исходную систему в любую из систем рассматриваемого класса*. В работе [4] было показано, что в теории электрических машин исходной системой может служить система не связанных между собой объемных или поверхностных проводников; ее конкретный вид не был существенным для поставленной в [4] задачи, так как параметры исходной системы и связей были исключены из окончательных уравнений движения.

В настоящей заметке в качестве простейшей исходной системы, охватывающей, тем не менее, все неявнополюсные машины, приняты два тонкостенных проводящих цилиндра, для которых легко решается точная электродинамическая задача. Показано, что «первичная машина» Крона (для неявнополюсных машин) является фактически частным случаем такой исходной системы; рассмотрен метод составления уравнений связи, вырожденные связи и преобразование Горева — Парка [7,8].

1. Рассмотрим два коаксиальных цилиндра радиусов a и b с бесконечно тонкими проводящими стенками (поверхностная проводимость σ). С каждым из цилиндров связана своя система отсчета ρ, ϑ, z и ρ' ϑ', z'; внешний цилиндр (статор) неподвижен, внутренний (ротор) вращается со скоростью $\dot{\varphi}$. Оставляя в стороне краевые эффекты на торцах, влияние насыщения железа и т. д., примем, что цилиндры бесконечны, окружающая среда линейна и однородна ($\mu = \mathrm{const}$) и поверхностные токи ротора и статора $i'_{(\text{р})}(\vartheta')$ и $i_{(\text{с})}(\vartheta)$ параллельны образующим цилиндров (оси z, z'). Имея в виду последующий переход к системам с конечным числом степеней свободы, целесообразно представить искомые токи ($i_{(\text{с})}(\vartheta)$ в неподвижной и $i'_{(\text{р})}(\vartheta')$ во вращающейся системах координат) в виде рядов

$$i'_{(\text{р}(}(\vartheta') = \frac{1}{a} \sum_{r}^{\infty} (\underset{1}{\dot{\varkappa}'_r} \cos r\vartheta' + \dot{\varkappa}'_r \sin r\vartheta'), \quad i_{(\text{с})}(\vartheta') = \frac{1}{b} \sum_{r}^{\infty} (\underset{1}{\dot{Q}_r} \cos r\vartheta + \underset{2}{\dot{Q}_r} \sin r\vartheta) \tag{1}$$

---

* Такой метод составления уравнений движения был положен Кроном [2] в основу общей теории электрических машин. Однако, вследствие того, что используемая им исходная система лишена конкретного физического содержания, остается неясным, на каком основании той или иной конструкции машин сопоставляется определенный вид связей.

и принять счетное множество токов $\dot{\varkappa}'_r(t)$ и $\dot{Q}_r(t)$ за обобщенные скорости. При таком выборе независимых переменных квази-стационарные уравнения Максвелла могут быть, как известно, записаны в форме Лагранжа (функции Лагранжа $L = L_{\text{мех}} + W_{\text{маг}}$), и решение точной электродинамической задачи сводится к решению счетного множества дифференциальных уравнений:

$$L_r \underset{1,2}{\ddot{\varkappa}'_r} + M_r\left[\underset{1}{\ddot{Q}_r} \begin{smallmatrix}\cos\\ -\sin\end{smallmatrix} r\varphi + \underset{2}{\ddot{Q}_r} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} r\varphi - r\dot{\varphi}\left(\underset{1}{\dot{Q}_r} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} r\varphi + \underset{2}{\dot{Q}_r} \begin{smallmatrix}-\cos\\ \sin\end{smallmatrix} r\varphi\right)\right] =$$

$$= \underset{1,2}{E'_{(\text{р})r}} - R_{(\text{р})} \underset{1,2}{\dot{\varkappa}'_r};$$

$$L_r \underset{1,2}{\ddot{Q}_r} + M_r\left[\underset{1}{\ddot{\varkappa}'_r} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} r\varphi + \underset{2}{\ddot{\varkappa}'_r} \begin{smallmatrix}-\sin\\ \cos\end{smallmatrix} r\varphi - r\dot{\varphi}\left(\underset{1}{\dot{\varkappa}'_r} \begin{smallmatrix}\sin\\ -\cos\end{smallmatrix} r\varphi + \underset{2}{\dot{\varkappa}'_r} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} r\varphi\right)\right] =$$

$$= \underset{1,2}{E_{(\text{с})r}} - R_{(\text{с})} \underset{1,2}{\dot{Q}_r}; \tag{2}$$

$$J\ddot{\varphi} - \sum_r^{\infty} rM_r\left[\left(-\underset{1}{\dot{Q}_r}\sin r\varphi + \underset{2}{\dot{Q}_r}\cos r\varphi\right)\underset{1}{\dot{\varkappa}'_r} - \left(\underset{1}{\dot{Q}_r}\cos r\varphi + \underset{2}{\dot{Q}_r}\sin r\varphi\right)\underset{2}{\dot{\varkappa}'_r}\right] =$$

$$= K - h\dot{\varphi},$$

где E_r — сторонние эдс, конкретный вид которых для дальнейшего несуществен; K — механический момент; h — коэффициент трения; $L_r = \frac{\pi}{2r}\mu l$; $M_r = \frac{\pi}{2r}\mu l\left(\frac{a}{b}\right)^r$; $R_{(\text{р})} = \frac{\pi}{\sigma a} l$; $R_{(\text{с})} = \frac{\pi}{\sigma b} l$; l—эффективная длина цилиндров. Верхний знак в (2) относится к первому индексу, нижний — ко второму. Уравнения (2) определяют коэффициенты рядов (1), т. е. плотности тока $i_{(\text{с})}(\vartheta)$ и $i'_{(\text{р})}(\vartheta')$. Для решения ряда задач существенно бывает знать оба тока в одной системе отсчета, например, в неподвижной. Плотность тока $i_{(\text{р})}(\vartheta)$ в неподвижной системе координат можно принять за новую неизвестную функцию

$$i_{(\text{р})}(\vartheta) = \frac{1}{a}\sum_r^{\infty}\left(\underset{1}{\dot{\varkappa}_r}\cos r\vartheta + \underset{2}{\dot{\varkappa}_r}\sin r\vartheta\right) \tag{3}$$

и составить уравнения для $\underset{1}{\dot{\varkappa}_r}$ и $\underset{2}{\dot{\varkappa}_r}$. Сравнение (3) с (1) с учетом $\vartheta' = \vartheta - \varphi$ показывает, что новые переменные $\dot{\varkappa}_r$ связаны со старыми $\dot{\varkappa}'_r$ неинтегрируемыми соотношениями

$$\underset{1,2}{\dot{\varkappa}_r} = \underset{1}{\dot{\varkappa}'_r} \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} r\varphi + \underset{2}{\dot{\varkappa}'_r} \begin{smallmatrix}-\sin\\ \cos\end{smallmatrix} r\varphi. \tag{4}$$

Таким образом, переменные $\varkappa_r$ не являются истинными координатами соответственно уравнения для них (уравнения в квази-координатах) отличаются от обычных лагранжевых и записываются в форме Больцманна — Хамеля

$$L_r \underset{1,2}{\ddot{\varkappa}_r} + M_r\left(\underset{1,2}{\ddot{Q}_r} \pm r\dot{\varphi}\underset{2,1}{\dot{Q}_r}\right) \pm L_r r\dot{\varphi}\underset{2,1}{\dot{\varkappa}_r} = \underset{1,2}{E_{(\text{р})r}} - R_{(\text{р})}\underset{1,2}{\dot{\varkappa}_r};$$

$$L_r \underset{1,2}{\ddot{Q}_r} + M_r \underset{1,2}{\ddot{\varkappa}_r} = \underset{1,2}{E_{(\text{с})r}} - R_{(\text{с})}\underset{1,2}{\dot{Q}_r}; \quad J\ddot{\varphi} - \sum_r^{\infty} rM_r\left(\underset{1}{\dot{\varkappa}_r}\underset{2}{\dot{Q}_r} - \underset{2}{\dot{\varkappa}_r}\underset{1}{\dot{Q}_r}\right) = K - h\dot{\varphi}, \tag{5}$$

где $\underset{1,2}{E_{(\text{р})r}}$ — соответствующим образом преобразованные эдс.

2. В реальных машинах поверхностный ток появляется как идеализация плотной обмотки, и его распределение определяется свойствами последней. Статорные обмотки фиксируют распределение тока ([4]) в

неподвижной системе координат:

$$i_{(c)} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{N} \dot{q}_k m_k(\vartheta), \tag{6}$$

где $\dot{q}_k$ — независимые токи, $m_k(\vartheta)$ — функция распределения обмотки (число проводников на единицу угла). Для роторных обмоток следует различать два случая: а) в бесколлекторных машинах, благодаря применению контактных колец, распределение фиксируется в сопровождающей (вращающейся) системе координат, и б) в коллекторных машинах распределение фиксируется в неподвижной (неподвижные щетки) системе координат, т. е.

$$\text{а)}\quad i'_{(p)} = \frac{1}{a} \sum_{\nu=1}^{T} \dot{q}_\nu m'_\nu(\vartheta'); \qquad \text{б)}\quad i_{(p)} = \frac{1}{a} \sum_{\nu=1}^{T} \dot{q}_\nu m_\nu(\vartheta). \tag{7}$$

Разложим (6) — (7) в ряды Фурье; сравнение результата разложения с рядами (1) показывает, что бесколлекторные машины получаются наложением счетного множества интегрируемых связей на истинные обобщенные скорости исходной системы $\dot{\varkappa}'_r$, $\dot{Q}_r$:

$$\dot{Q}_{\underset{1,2}{r}} = \sum_{k=1}^{N} m^r_{\underset{1,2}{k}} \dot{q}_k; \qquad \dot{\varkappa}'_{\underset{1,2}{r}} = \sum_{\nu=1}^{T} m'^r_{\underset{1,2}{\nu}} \dot{q}_\nu, \tag{8a}$$

где $m^r_{\underset{1,2}{k}}$ и $m'^r_{\underset{1,2}{k}}$ — коэффициенты Фурье соответствующих функций распределения. Поэтому уравнения движения бесколлекторных машин могут быть записаны в виде уравнений Лагранжа для q_k, q_ν, φ.

Иная картина имеет место для коллекторных машин, которые получаются из исходной системы наложением неинтегрируемых связей на истинные обобщенные скорости:

$$\dot{Q}_{\underset{1,2}{r}} = \sum_{k}^{N} m^r_{\underset{1,2}{k}} \dot{q}_k; \qquad \dot{\varkappa}'_{\underset{1,2}{r}} = \sum_{\nu=1}^{T} \dot{q}_\nu \left(m^r_{\underset{1}{\nu}} \begin{smallmatrix} \cos \\ -\sin \end{smallmatrix} r\varphi + m^r_{\underset{2}{\nu}} \begin{smallmatrix} \sin \\ \cos \end{smallmatrix} r\varphi \right). \tag{8b}$$

Связи (8b) принадлежат к типу, рассмотренному С. А. Чаплыгиным ([5]), и уравнения движения коллекторных машин записываются в виде уравнений Чаплыгина. Нетрудно убедиться, что уравнения статорных обмоток сохраняют лагранжеву форму; в уравнениях роторных обмоток появляется добавок $\dot{\varphi} \sum\limits_k M'_{k\nu} \dot{q}_k$, а в уравнении для φ — добавок $-\sum\limits_{k,\nu} M'_{k\nu} \dot{q}_\nu \dot{q}_k$ (здесь $M'_{k\nu} = \sum\limits_{r}^{\infty} r M_r \left(m^r_{\underset{1}{\nu}} m^r_{\underset{2}{k}} - m^r_{\underset{2}{\nu}} m^r_{\underset{1}{k}} \right)$).

3. Для решения многих задач теории электрических машин можно, с достаточной точностью, пренебречь высшими гармониками функций распределения обмоток, т. е. положить $m^r_{\underset{1,2}{\nu,k}} \equiv 0$ при $r \geqslant 2$. Результат этой операции — электромеханическую систему с 5 степенями свободы, описываемую в истинных координатах уравнениями (2), в квази-координатах уравнениями (5) (при $r = 1$), можно рассматривать как новую исходную систему, общую для всех электрических машин, допускающих указанную идеализацию*. Отметим, что уравнения движения как коллекторных, так и бесколлекторных машин удобнее получать из более простых уравнений движения исходной системы в квази-координатах (5); первые получаются из (5) интегрируемым, вторые — неинтегрируемым преобразованием переменных**. Например,

* Такая упрощенная исходная система (с обобщением на явнополюсные машины) принята фактически в работах Крона ([2,3]).

** Наложение связей можно всегда рассматривать как преобразование переменных с особенной матрицей.

если функция распределения каждой обмотки ротора бесколлекторной машины $m'_\nu(\vartheta')$ антисимметрична относительно некоторого значения $\vartheta' = \gamma'_\nu$ (оси обмотки) и плотности витков в них одинаковы (т. е. $m'_\nu(\vartheta') = m'(\vartheta' - \gamma')$), то связи, накладываемые обмоткой на токи в роторе, имеют вид

$$\underset{1,2}{\dot{\varkappa}} = m_1 \sum_{\nu=1}^{T} \dot{q}_\nu \frac{-\sin}{\cos} (\varphi + \gamma_\nu). \tag{9}$$

4. Коэффициенты уравнения движения бесколлекторных машин являются функциями φ, что затрудняет их интегрирование. С другой стороны, эти уравнения получаются (в принятой идеализации) при помощи преобразования (9) из уравнений с постоянными коэффициентами (5). Целесообразно поэтому принять в качестве новых переменных, описывающих электрическое состояние ротора бесколлекторной машины, не токи в фазах $\dot{q}_\nu$, а их линейные комбинации $\underset{1}{\dot{\varkappa}}$ и $\underset{2}{\dot{\varkappa}}$ (9). Возможность такой замены очевидна в случае $T = 2$, когда определитель (9) отличен от нуля и связи вырождаются в обычное преобразование координат. При $T > 2$ переменных $\underset{1}{\dot{\varkappa}}$ и $\underset{2}{\dot{\varkappa}}$ недостаточно для описания электрического состояния ротора, имеющего T «электрических» степеней свободы (T-фазный ротор). Нетрудно, однако, показать, что в этом случае $T - 2$ уравнения сводятся к условиям, накладываемым на обобщенные силы $E_\nu - R_\nu \dot{q}_\nu$, действующие в фазах ротора

$$\sum_{\nu=1}^{T} \xi_\alpha^\nu \cdot (E_\nu - R_\nu \dot{q}_\nu) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, T - 2, \tag{10}$$

где ξ_α^ν — независимые решения системы двух уравнений $\sum\limits_{\nu=1}^{T} \xi^\nu \frac{\sin}{\cos} (\varphi + \gamma_\nu) = 0$.

В качестве новых переменных вместо токов $\dot{q}_\nu$ можно выбрать токи $\underset{1}{\dot{\varkappa}}$, $\underset{2}{\dot{\varkappa}}$ и $T - 2$ линейных комбинаций $\dot{q}^*_\alpha = \sum\limits_{\nu=1}^{T} \xi_\alpha^\nu \dot{q}_\nu$. Для симметричных машин $\gamma_\nu = (\nu - 1)\frac{2\pi}{T}$, решения ξ_α^ν не зависят от φ и могут быть подобраны таким образом, что преобразование от новых переменных к старым будет ортогональным. (Например, в случае трехфазной машны $\xi_1 = \text{const}$ и $\dot{q}^*_1 = (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)\,\text{const}$.) При этом токи $\underset{1}{\dot{\varkappa}}$ и $\underset{2}{\dot{\varkappa}}$, совпадающие с точностью до масштаба с токами прямой и обратной последовательностей, удовлетворяют уравнениям (5) с постоянными коэффициентами, а $\dot{q}^*_\alpha$ — токи нулевых последовательностей различного порядка ([6]) — уравнениям (10), принимающим вид $R\dot{q}^*_\alpha = E^*_\alpha$ (самоиндукция рассеяния не учитывается). Соответствующее преобразование токов совпадает с преобразованием Горева — Парка ([7,8]).

Горьковский исследовательский
физико-технический институт
при Горьковском государственном университете

Поступило
28 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] B. Hoffmann, Quart. of. Appl. Math., **2**, 218 (1944). [2] G. Kron, J. Math. and Phys., **13**, 103 (1934). [3] W. Gibbs, The Engineer, Oct. — Nov. (1951). [4] А. В. Гапонов, ДАН, **87**, № 3 (1952). [5] С. А. Чаплыгин, Тр. Отд. физ. наук Об-ва любителей естествознания, **9** (1897). [6] И. М. Садовский, Вестн. электорпром., № 1, 3 (1949). [7] А. А. Горев, Переходные процессы синхронной машины, 1950. [8] R. H. Park. Trans. Am. I. E. E., July, **48**, № 3, 716 (1929).