Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 1

ГИДРАВЛИКА

Ф. И. ФРАНКЛЬ

О ДВИЖЕНИИ ПЕСЧАНЫХ ВОЛН

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 8 I 1953)

В 1920 г. Экснер сделал попытку решения вопроса о движении песчаных волн на дне реки ([1]), основанную на предположении линейной зависимости твердого стока p от скорости потока u:

$$p = ku. \tag{1}$$

При этом, однако, он не учитывал ни двумерного характера потока (распределения скорости по вертикали), ни его неустановившегося характера, ни образования волн на свободной поверхности реки *.

В данной заметке мы будем рассматривать задачу как двумерную с учетом вышеуказанных обстоятельств. Волны мы будем считать имеющими малую амплитуду относительно длины волны; в связи с этим мы будем считать проекции местной скорости воды (u, v) равными

$$u = U + u', \quad v = v', \quad u', v' \ll U \tag{2}$$

(U — средняя скорость течения).

Будем допускать произвольную зависимость p от придонного значения u (подразумевается — вне пограничного слоя), что, вследствие малой переменности u, приводит приближенно к уравнению вида

$$p = \bar{p} + ku' \tag{3}$$

($\bar{p}$, k — постоянные для данного течения).

Пусть

$$\bar{y} = \bar{y}(x, t) \tag{4}$$

ордината точки дна, соответствующая абсциссе x и времени t.

Тогда имеем в качестве краевого условия у дна уравнение Экснера

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{5}$$

которое, вследствие (3), приводит к условию

$$\frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + k\frac{\partial u'}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

* Другая теория движения песчаных волн, выдвинутая Полья и Эйнштейном в 1937 г., пользуется понятием «объема лежащих наносов», не имеющего определенного смысла, и вовсе не учитывает гидродинамики ([1]).

Но у дна должно быть в первом приближении

$$v = \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}, \tag{7}$$

вследствие чего уравнение (6) принимает вид

$$k \frac{\partial u'}{\partial x} + v - U \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

или, после дифференцирования по времени относительно системы координат $T'(x', y)$, движущейся вниз по течению со скоростью U (это дифференцирование обозначим через $\delta/\delta t$):

$$k \frac{\partial \delta u'}{\partial x' \, \delta t} + \frac{\delta v'}{\delta t} - U \frac{\partial v}{\partial x'} = 0. \tag{9}$$

В данном приближении мы должны принять, что условие имеет место при $y = 0$.

Рассмотрим сперва случай бесконечной глубины потока. Тогда имеем краевое условие на бесконечном расстоянии от дна:

$$u' = v' = 0 \quad \text{при } y = +\infty. \tag{10}$$

Считая поток безвихревым течением несжимаемой жидкости, мы должны искать комплексную скорость

$$w = u' + iv'. \tag{11}$$

Чтобы получить синусоидальную волну длины l, движущуюся со скоростью c относительно системы координат T', мы должны искать решения в виде

$$w = Ae^{i\xi}, \tag{12}$$

где

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{2\pi}{l}(x' - ct + iy). \tag{12a}$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{2\pi}{l}\frac{\partial}{\delta \xi}; \quad \frac{\delta}{\delta t} = -\frac{2\pi c}{l}\frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2\pi}{l}\frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{13}$$

Но

$$u' = Ae^{-\eta}\cos\xi, \quad v' = -Ae^{-\eta}\sin\xi.$$

Условие (10), очевидно, выполнено.

Краевое условие (9) приводит к

$$k\frac{2\pi}{l}c + c + U = 0$$

или

$$c = -\frac{U}{1 + 2\pi \frac{k}{l}}. \tag{14}$$

Таким образом, получается волна, распространяющаяся вверх по течению относительно системы T', иначе говоря, распространяющаяся относительно земли со скоростью меньше скорости течения U, что соответствует опыту.

Скорость движения волны относительно земли равна

$$C = c + U = U\left(1 - \frac{1}{1 + 2\pi \frac{k}{l}}\right). \tag{15}$$

Скорость C убывает с ростом длины волны; она стремится к U для бесконечно коротких волн и к нулю для бесконечно длинных волн.

Формулы (14), (15), очевидно, применимы к движению барханов в пустыне.

В случае конечной глубины имеем на поверхности реки условие постоянства давления, которое с точностью данного приближения принимает вид

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} + gy = \text{const}, \tag{16}$$

где φ — потенциал скорости относительно системы T'. Дифференцирование по t дает

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta t^2} + gv = 0 \quad \text{при } y = h \tag{17}$$

(h — средняя глубина реки).

Чтобы удовлетворить одновременно условиям (9) и (17), нужно искать решение в виде

$$w = Ae^{i\zeta} + Be^{-i\zeta}, \tag{18}$$

чему соответствует комплексный потенциал

$$\chi = \frac{l}{2\pi}\int w\,d\zeta = -\frac{il}{2\pi}(Ae^{i\zeta} - Be^{-i\zeta}). \tag{19}$$

Следовательно, имеем

$$\begin{gathered} u' = (Ae^{-\eta} + Be^{\eta})\cos\xi, \quad v' = (-Ae^{-\eta} + Be^{\eta})\sin\xi, \\ \varphi = \frac{l}{2\pi}(Ae^{-\eta} + Be^{\eta})\sin\xi. \end{gathered} \tag{20}$$

Условия (9) и (17) дают:

$$\left[U + \left(1 + 2\pi\frac{h}{l}\right)c\right]A - \left[U + \left(1 - 2\pi\frac{k}{l}\right)c\right]B = 0, \tag{21}$$

$$e^{-\eta_1}\left(\frac{2\pi c^2}{l} + g\right)A + e^{\eta_1}\left(\frac{2\pi c^2}{l} - g\right)B = 0, \tag{22}$$

где

$$\eta_1 = 2\pi\frac{h}{l}. \tag{22a}$$

Требование совместимости этих уравнений дает:

$$\left[U + \left(1 + 2\pi\frac{k}{l}\right)c\right]\left(\frac{2\pi c^2}{l} - g\right)e^{\eta_1} + \\ + \left[U + \left(1 - 2\pi\frac{k}{l}\right)c\right]\left(\frac{2\pi c^2}{l} + g\right)e^{-\eta_1} = 0$$

или

$$\left(2\pi\frac{h}{l}\operatorname{sh}\eta_1 + \operatorname{ch}\eta_1\right)\frac{2\pi}{l}c^3 + \frac{2\pi}{l}U\operatorname{ch}\eta_1 c^2 - \\ - g\left(2\pi\frac{k}{l}\operatorname{ch}\eta_1 + \operatorname{sh}\eta_1\right)c - Ug\operatorname{sh}\eta_1 = 0. \tag{23}$$

В пределе $\eta_1 \to +\infty$ два корня этого уравнения стремятся к $\pm\infty$, а третий стремится к значению (14). Этот средний корень, очевидно, соответствует наблюдаемым в природе волнам; имеют ли остальные корни физический смысл — пока неясно.

При больших значениях η_1, т. е. при $h \gg l$, средний корень приближенно равен

$$c = c_\infty + \Delta c, \tag{24}$$

где

$$c_\infty = -\frac{U}{1 + 2\pi \frac{k}{l}}, \tag{24а}$$

$$\Delta c = e^{-2\eta_1} \frac{\left(g + \frac{2\pi c_\infty^2}{l}\right)\left[U + \left(1 - 2\pi \frac{h}{l}\right) c_\infty\right]}{\left(1 + 2\pi \frac{k}{l}\right)\left(g - \frac{6\pi c_\infty^2}{l}\right) - \frac{4\pi U}{l} c_\infty}. \tag{24б}$$

Из этой формулы видно, что глубину можно считать бесконечной, если

$$e^{-4\pi \frac{h}{l}} \ll 1.$$

В случае произвольной формы дна в начальный момент времени общее решение должно быть получено на основании решения (18) при помощи интеграла Фурье.

Киргизский государственный университет

Поступило 16 X 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Великанов, Динамика русловых потоков, М.— Л., 1946.