

ГИДРОМЕХАНИКА

Член-корреспондент АН СССР Л. Н. СРЕТЕНСКИЙ

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ  
УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ**

Задача об определении установившихся волн конечной амплитуды решена различными методами в случае движений, параллельных плоскости. В недавних работах Я. И. Секерж-Зеньковича, Пеннея и Прайса<sup>(1)</sup> рассмотрен вопрос о приближенном определении стоячих волн конечной амплитуды в предположениях трехмерной задачи. Пространственная задача об установившихся волнах рассмотрена лишь в одной работе Ю. М. Крылова<sup>(2)</sup>. В настоящей заметке мы даем резюме наших вычислений по определению установившихся периодических волн на поверхности трехмерного потока. Наш метод позволяет найти волновой поток с любой степенью точности относительно некоторого малого параметра.

Возьмем потенциал скоростей в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & -vx + (\alpha_{11} e^{k_{11}z} \cos ny + \alpha_{13} e^{k_{11}z} \cos 3ny + \dots) \sin mx + \\ & + (\alpha_{20} e^{2k_{20}z} + \alpha_{22} e^{2k_{21}z} \cos 2ny + \dots) \sin 2mx + \\ & + (\alpha_{31} e^{3k_{31}z} \cos ny + \alpha_{33} e^{3k_{31}z} \cos 3ny + \dots) \sin 3mx + \\ & + \dots \end{aligned}$$

где  $v$  и  $m, n$  суть данные величины; коэффициенты  $\alpha_{r,s}$  должны быть определены.

Введем вместо времени  $t$  новое переменное  $\tau$ , полагая  $\tau = qt$ , где  $q$  есть некоторая постоянная величина, определяемая в процессе решения задачи. Введем обозначения

$$v = qv, \quad \alpha_{11} = qv$$

и будем искать величину  $v$  и неизвестные коэффициенты  $\alpha_{rs}$  в виде следующих рядов, расположенных по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} v = & 1 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots; \\ \alpha_{rs} = & \frac{1}{r} \varepsilon^{r+s-1} (\beta_{r1} + \varepsilon^2 \beta_{r3} + \dots), \quad r, s \text{ нечетные;} \\ \alpha_{rs} = & \frac{1}{r} \varepsilon^{r+s} (\beta_{r0} + \varepsilon^2 \beta_{r2} + \dots), \quad r, s \text{ четные.} \end{aligned}$$

Мы определили изложенным ниже способом все члены этих рядов, содержащие  $\varepsilon$  в степени, не превосходящей 3.

Положим, с некоторыми упрощениями в обозначениях:

$$\frac{\varphi}{q} = -\nu + \varepsilon (e^{k_1 z} \cos ny + \varepsilon^2 \beta_{13} e^{3k_1 z} \cos 3ny + \dots) \sin mx + \\ + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\beta_2 e^{2k_2 z} + \dots) \sin 2mx + \frac{1}{3} \varepsilon^3 (\beta_3 e^{3k_3 z} \cos ny + \dots) \sin 3mx + \dots;$$

здесь  $\beta_{13}, \beta_2, \beta_3$  суть искомые числа, не зависящие от  $\varepsilon$ .

Проинтегрируем уравнения движения частиц жидкости

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{1}{q} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{d\tau} = -\frac{1}{q} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{1}{q} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

степенными рядами

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots, \\ y &= y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \varepsilon^3 y_3 + \dots, \\ z &= z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \varepsilon^3 z_3 + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Если принять, что

$$\nu_1 = 0, \quad \nu_2 = 1/2 (n^2 + 2m^2 \cos^2 nb) e^{2k_1 c}, \quad \nu_3 = 0,$$

то эти ряды не будут содержать вековых членов; здесь  $a, b, c$  суть координаты Лагранжа частицы жидкости.

Мы имеем:

$$\begin{aligned} x_0 &= \tau + a; & x_1 &= P_1 \sin m(\tau + a); & x_2 &= P_2 \sin 2m(\tau + a); \\ & & x_3 &= P_3 \sin 3m(\tau + a) + P'_3 \sin m(\tau + a); \\ y_0 &= b; & y_1 &= Q_1 \cos m(\tau + a); & y_2 &= Q_2 \cos 2m(\tau + a); \\ & & y_3 &= Q_3 \cos 3m(\tau + a) + Q'_3 \cos m(\tau + a); \\ z_0 &= c; & z_1 &= R_1 \cos m(\tau + a); & z_2 &= R_2 \cos 2m(\tau + a); \\ & & z_3 &= R_3 \cos 3m(\tau + a) + R'_3 \cos m(\tau + a). \end{aligned}$$

Приведем значения некоторых из коэффициентов  $P_1, Q_1, \dots, R'_3$ :

$$\begin{aligned} P_1 &= -e^{k_1 c} \cos nb, & P_2 &= -\left[ \frac{n^2}{4m} e^{2k_1 c} + \frac{1}{2} \beta_2 e^{2k_2 c} \right], & Q_2 &= 0, \\ P_3 &= -\frac{1}{3m} \left\{ \frac{n^4}{4m} e^{3k_1 c} \cos nb + m\beta_3 e^{3k_3 c} \cos nb + \right. \\ & & & \left. + \frac{5}{4} m (k_1 - m) \beta_2 e^{(k_1 + 2k_2) c} \cos nb \right\}, \\ P'_3 &= -\frac{1}{m} \left\{ \left[ \frac{n^2}{4m} (5m^2 + 2n^2) \cos nb + \frac{1}{2} m^3 \cos^3 nb \right] e^{3k_1 c} + \right. \\ & & & \left. + \frac{5}{4} m (k_1 + m) \beta_2 e^{(k_1 + 2k_2) c} \cos nb + m\beta_{13} e^{3k_{13} c} \cos 3nb \right\}. \end{aligned}$$

Возьмем интеграл Бернулли

$$\frac{p}{\rho} = C - gz - \frac{1}{2} V^2$$

и подставим в правую его часть вместо  $x, y, z$  их разложения (1); мы получим тогда некоторый тригонометрический многочлен; приравнявая

нулю коэффициенты при  $\cos m(\tau + a)$ ,  $\cos 2m(\tau + a)$ ,  $\cos 3m(\tau + a)$ , входящих в этот многочлен, мы получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & (gR_1 + mv^2 P_1) \varepsilon + \\ & + [gR'_3 + mv^2 (P'_3 + mP_1 P_2 + mQ_1 Q_2 + mR_1 R_2 - 2v_2 P_1)] \varepsilon^3 = 0, \\ & gR_2 \varepsilon^2 + \frac{1}{4} m^2 v^2 \left( P_1^2 - Q_1^2 - R_1^2 + \frac{8}{m} P_2 \right) \varepsilon^2 = 0, \\ & gR_3 \varepsilon^3 + mv^2 (3P_3 + mP_1 P_2 - mQ_1 Q_2 - mR_1 R_2) \varepsilon^3 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При соблюдении этой системы уравнений интеграл Бернулли примет вид:

$$\frac{p}{\rho} = C - gc - \frac{1}{4} v^2 [m^2 (P_1^2 + Q_1^2 + R_1^2) - 4v_2] \varepsilon^2 + * \varepsilon^3 + \dots \quad (3)$$

Полагая в системе уравнений (2)

$$v^2 = v_0 + \varepsilon^2 v_2 + \dots,$$

мы получаем значения неизвестных коэффициентов  $\beta_2, \beta_3, \beta_{13}, v_0, v_2$  в предположении  $n \neq 0$ :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{gk_1}{m^2}, \quad \beta_2 = \frac{n^2 k_1}{m(m-2k_1)} e^{2(k_1-k_2)c_0}, \quad \beta_{13} = \frac{m^2 k_1}{\frac{1}{3}k_1 - k_{13}} e^{3(k_1-k_{13})c_0}, \\ \beta_3 &= \frac{k_1 n^2}{\frac{1}{3}k_3 - k_1} \frac{5n^2(2k_1 - m) - 4m(k_1 - m)(5k_1 - m)}{12m^2(2k_1 - m)} e^{3(k_1-k_3)c_0}, \\ v_2 &= \frac{m(5n^4 - 3m^4) - 2k_1(n^4 - 3m^4)}{4m^2(2k_1 - m)} v_0 e^{2k_1 c_0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $c_0$  есть постоянное число, равное  $\frac{1}{g} \left( C - \frac{p}{\rho} \right)$ .

Возьмем интеграл Бернулли (3), написанный для точек открытой поверхности жидкости, в следующем виде:

$$c = c_0 - \frac{k_1}{4m^2} \left( 1 + \varepsilon^2 \frac{v_2}{v_0} \right) [m^2 (P_1^2 + Q_1^2 + R_1^2) - 4v_2] \varepsilon^2 + * \varepsilon^3.$$

Решая это уравнение относительно  $c$ , мы находим уравнение открытой поверхности жидкости в координатах Лагранжа:

$$c = c_0 + \frac{k_1}{4m^2} (k_1^2 + m^2 \cos 2nb) e^{2k_1 c_0} \varepsilon^2 + * \varepsilon^3 + \dots$$

или

$$c = c_0 + \frac{k_1 v_2}{2m^2} \varepsilon^2 + * \varepsilon^3 + \dots$$

Заменим в рядах (1) координату  $c$  этим ее выражением; мы получим тогда уравнение открытой поверхности жидкости в виде закона течения частиц жидкости по этой поверхности. Ряды (1) изображают движение частиц жидкости, принадлежащих потоку; время  $t$  входит в эти ряды под знаками тригонометрических функций. Вновь введенное переменное  $\tau$  выражается через время  $t$  формулой

$$\tau = v_0 t \frac{\sqrt{1 + \frac{v_2}{v_0} \varepsilon^2 + \dots}}{1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots}.$$

Так как коэффициент  $\gamma_2$  содержит координаты  $b$  и  $c$  частицы жидкости, то мы имеем и в случае пространственных установившихся волн явление приповерхностного течения, открытое Стоксом в теории плоских волн.

Из формул (4) вытекает зависимость между скоростью потока, амплитудой волны и длинами волны в двух взаимно-перпендикулярных направлениях.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
29 XI 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Я. И. Секерж-Зенькович, ДАН, 86, № 1 (1952); W. G. Penney, A. T. Price, Phil. Trans. Roy. Soc. London (A), 224, No. 882 (1952). <sup>2</sup> Ю. М. Крылов, Тр. Гос. океанограф. ин-та, в. 21 (33) (1952).