Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 1

МЕХАНИКА

Действительный член Болгарской Академии наук И. ЦЕНОВ

ОБ ОДНОЙ НОВОЙ ФОРМЕ УРАВНЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 12 I 1953)

Положим, что $q_1, q_2, \ldots, q_s$ (или, сокращенно, $[q_i]$) суть обобщенные координаты некоторой голономной механической системы. Тогда радиус-вектор каждой точки системы будет функцией этих координат и времени, вообще говоря, что сокращенно можно записать в форме $\overrightarrow{OM} = \mathbf{M}([q_i], t)$, откуда выражение для вариации радиуса-вектора будет иметь вид: $\delta\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}\delta q_i$.

По отношению к обобщенным координатам мы будем применять тензорное правило суммирования, а при суммировании по точкам системы будем употреблять знак Σ.

Напишем общее уравнение динамики, выражающее принцип Даламбера — Лагранжа:

$$\sum(-m\ddot{\mathbf{M}} + \mathbf{F})\,\delta\mathbf{M} = 0.$$

После подстановки выражений $\delta\mathbf{M}$ последнее уравнение распадается на следующие уравнения движения:

$$P_i = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s), \tag{1}$$

где

$$P_i \equiv \sum m\ddot{\mathbf{M}}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}, \quad Q_i \equiv \sum \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение кинетическую энергию системы T и ее первые две полные производные по времени. Будем иметь:

$$T = \frac{1}{2}\sum m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}\sum m\dot{\mathbf{M}}^2, \tag{3}$$

$$\dot{T} = \sum m\dot{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{M}}, \quad \ddot{T} = \sum m\ddot{\mathbf{M}}^2 + \sum m\dot{\mathbf{M}}\dddot{\mathbf{M}}. \tag{4}$$

Исходя из $\dot{\mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}$, найдем

$$\ddot{\mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_i\,\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_k + 2\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_i\,\partial t}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t^2}; \tag{5}$$

$$\dddot{\mathbf{M}} = 3\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_i\,\partial q_k}\dot{q}_k\ddot{q}_i + 3\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_i\,\partial t}\ddot{q}_i +$$

$+$ члены, не содержащие вторых производных от координат q_i. (6)

Подставляя (5) и (6) в (4), можно будет затем написать следующие соотношения:

$$\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} = 2 \sum m\ddot{\mathbf{M}} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_i} + 3 \sum m\dot{\mathbf{M}} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_i \, \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_i \, \partial t} \right). \tag{7}$$

Из (3) вытекает:

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum m\dot{\mathbf{M}} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial t \, \partial q_i} \right).$$

В результате равенство (7) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} = 2P_i + 3 \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad \text{откуда} \quad P_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3 \frac{\partial T}{\partial q_i} \right),$$

и уравнения движения (1) голономной системы примут форму:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ddot{T}}{\partial \ddot{q}_i} - 3 \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{8}$$

Это и есть новая форма уравнений движения голономной механической системы.

Введем функцию T_0, подразумевая под ней выражение T, но рассматриваемое как функция только координат $[q_i]$ и t, т. е. при фиксированных скоростях $\dot{q}_i$. Тогда можно вывести путем непосредственных выкладок соотношения

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial \ddot{T}_0}{\partial \ddot{q}_i}, \tag{9}$$

и уравнения (8) перепишутся в виде:

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_i} = Q_i, \tag{10}$$

где $R = \frac{1}{2} (\ddot{T} - 3T_0)$.

Можно показать также, что функция R совпадает с энергией ускорения $S = \frac{1}{2} \sum m\ddot{\mathbf{M}}^2$ с точностью до слагаемых, не содержащих вторых производных от координат.

Наконец, введем функцию

$$K = R - Q_i \ddot{q}_i = \frac{1}{2} (\ddot{T} - 3T_0) - Q_i \ddot{q}_i;$$

при $Q_i = \partial U / \partial q_i$ будем иметь $K = R - \ddot{U} = \frac{1}{2} (\ddot{T} - 3\dot{T}) - \ddot{U}$.

Тогда уравнения движения (10) можно переписать еще в виде

$$\frac{\partial K}{\partial \ddot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{11}$$

Уравнения (11) показывают, что при действительном движении системы функция K достигает минимума сравнительно с движениями, получаемыми путем варьирования ускорений $\ddot{q}_i$ в выражении функции K.

Положим далее, что на систему наложены неголономные связи, выражающиеся линейными дифференциальными соотношениями между независимыми координатами $q_1, q_2, \ldots, q_\alpha \ldots, q_k$, совокупность которых обозначим через $[q_\alpha]$, и зависимыми $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_r, \ldots, q_s$ (или $[q_r]$), причем уравнения связей имеют вид;

$$\dot{q}_r = a_{r\alpha} \dot{q}_\alpha + a_r \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, k; \; r = k+1, \; k+2, \ldots, s). \tag{12}$$

Дифференцируя (12) по времени и заменяя затем в выражении K зависимые $\ddot{q}_r$ их выражениями через независимые и обозначая преобразованную таким образом функцию K через K_l, найдем уравнения движения неголономных систем в виде

$$\frac{\partial K_l}{\partial \ddot{q}_\alpha} = 0 \quad \text{или в виде} \quad \frac{\partial R_l}{\partial \ddot{q}_\alpha} = P_\alpha, \tag{13}$$

где $P_\alpha = Q_\alpha + Q_r a_{r\alpha}$.

Так как $K = R - (Q_\alpha \ddot{q}_\alpha + Q_r \ddot{q}_r)$, то уравнения (13) могут быть еще написаны в виде:

$$\frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_\alpha} \equiv \frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \ddot{q}_r} a_{r\alpha} = P_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, k). \tag{13'}$$

Перейдем теперь от переменных q_i к новым переменным μ_k (полагая $\dot{\mu}_k = \omega_k$) при помощи некоторых дифференциальных соотношений вида:

$$\dot{q}_i = b_{ik}\, \omega_k + b_i \quad (i, k = 1, 2, \ldots, s).$$

Обозначая через K_1 функцию K, выраженную через $\dot{\omega}_k$, можно переписать уравнения (11) в виде

$$\frac{\partial K_1}{\partial \dot{\omega}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{14}$$

При наличии же неголономных связей уравнения (14) перейдут в уравнения

$$\frac{\partial K_{l_1}}{\partial \dot{\omega}_\beta} = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, k)\,^*. \tag{15}$$

Уравнения (14) можно применить к выводу уравнений Эйлера для движения твердого тела вокруг неподвижной точки, а также к выводу уравнений движения (без скольжения) обруча по горизонтальной плоскости. В первом случае выражение живой силы тела имеет вид (в обычных обозначениях)

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Полагая $p = \dot{\mu}_1$, $q = \dot{\mu}_2$, $r = \dot{\mu}_3$ и написав выражение элементарной работы активных сил

$$\sum (\mathbf{F}\, \delta \mathbf{M}) = L\, \delta\mu_1 + M\, \delta\mu_2 + N\, \delta\mu_3,$$

* Уравнения (14) под названием «Уравнения Аппелля в неголономных координатах», т. е. в форме

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}_\beta} = \Pi_\beta,$$

были выведены В. В. Добронравовым (²) в 1946 г.

можно найти выражение для функции K_1:

$$K_1 = {}^1/_2 (A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + Ap(r\dot{q} - q\dot{r}) +$$
$$+ Bq(p\dot{r} - r\dot{p}) + Cr(q\dot{p} - p\dot{q}) + (L\dot{p} + M\dot{q} + N\dot{r}), \qquad (16)$$

откуда и получаются уравнения Эйлера

$$A\dot{p} + (C - B)qr = L, \quad B\dot{q} + (A - C)rp = M,$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = N^*. \qquad (17)$$

В случае движения обруча по горизонтальной плоскости (без скольжения) функция K_1 переходит в функцию K_l, при помощи уравнения неголономной связи $\overline{V}_m = V_{\mathfrak{G}} + [\omega \overrightarrow{\mathfrak{G}m}]$, выражающего то обстоятельство, что скорость точки касания m обруча с плоскостью имеет в каждый момент времени скорость, равную нулю.

Наконец, отметим, что уравнения (11) инвариантны относительно преобразования переменных q_i в другие переменные, что показано уже по существу при получении уравнений (14). В случае конечных формул перехода $q_i = q_i([p_k])$ уравнения (11), очевидно, тоже сохранят свою форму в новых координатах $[p_k]$.

Поступило
19 III 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Appel, Traité de mécanique rationnelle, 2, 1931, p. 382. [2] В. В. Добронравов, Уч. зап. МГУ, в. 122, механика, 2, 95, 19 (1948).

* Уравнения Эйлера в случае Эйлера методом неголономных координат выведены в работе ([2]).