Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

А. Ф. ТИМАН

О ЯВЛЕНИЯХ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ В ПОВЕДЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 XII 1952)

Обозначим через $B_\sigma^{(q)}$ класс целых функций $f(z)$ $(z = x + iy)$ степени, не превышающей $\sigma > 0$, и таких, что*: 1) $|f(k\pi/\sigma)| \leqslant M$ $(k = 0, \pm 1, \ldots;$ M — некоторая константа); 2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)/|x|^q) = 0$.

Все классы $B_\sigma^{(q)}$ $(q > 0)$ содержат в себе в качестве правильной части класс B_σ целых функций степени, не превышающей σ, и равномерно ограниченных на всей вещественной оси.

Пусть, далее, $\rho(x)$ есть некоторая функция, определенная на всей вещественной оси и удовлетворяющая при некотором $\sigma_0 > \sigma$ условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma_0 |x|} |d\rho(x)| < \infty, \tag{1}$$

которое характеризует ее поведение на бесконечности и конечность полной вариации на всем интервале задания. Условие (1) обеспечивает существование на всех классах $B_\sigma^{(q)}$ $(q > 0)$ оператора

$$R(f; z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z + t)\, d\rho(t), \tag{2}$$

приводящего в соответствие всякой функции $f(z) \in B_\sigma^{(q)}$ некоторую другую функцию $R(z) = R(f; z)$ степени не выше σ.

Функцию $\rho(x)$ естественно назвать интерферирующей функцией на классе $B_\sigma^{(q)}$, если соответствующий оператор $R(f; z)$ отображает $B_\sigma^{(q)}$ в его часть B_σ. Представляет интерес выяснение тех условий, при которых $\rho(x)$ является интерферирующей функцией.

Ниже мы приведем исчерпывающее решение этой задачи.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $\rho(x)$ была интерферирующей функцией на классе $B_\sigma^{(q)}$ $(0 < q \leqslant 2)$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\sigma(t - x)\, d\rho(x)\, d\rho(t) = 0. \tag{3}$$

Справедливо также обобщение теоремы 1 на случай произвольного положительного q.

* Если степень функции $f(z)$ строго меньше σ, то, как известно, условие 1) равносильно ее равномерной ограниченности на всей вещественной оси.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $\rho(x)$ была интерферирующей функцией на классе $B_\sigma^{(q)}$ $(q > 0)$, необходимо и достаточно, чтобы при $k = 0, 1, 2, \ldots, q_0$ (где q_0 — наименьшее целое неотрицательное число, большее либо равное $q-2$), все моменты $\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^k \begin{matrix}\sin \sigma t \\ \cos \sigma t\end{matrix} d\rho(t)$ обращались в нуль.*

В частности, рассматривая, например, функции

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < -\dfrac{\pi}{2\sigma}, \\ \dfrac{1}{2}, & -\dfrac{\pi}{2\sigma} \leqslant x < \dfrac{\pi}{2\sigma}, \\ 1, & x \geqslant \dfrac{\pi}{2\sigma}; \end{cases} \qquad \rho(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x < \dfrac{2\pi}{\sigma}, \\ 1, & x \geqslant \dfrac{2\pi}{\sigma}, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию (3), мы таким образом наблюдаем явление интерференции, впервые обнаруженное при $q = 1$ С. Н. Бернштейном [2]. Пользуясь условием (3), можно указать еще целый ряд других явлений интерференции. Среди них заслуживают внимания интерференции, соответствующие функциям

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{2(3r-1)\pi}{3\sigma}, \\ \dfrac{1}{3}, & \dfrac{2(3r-1)\pi}{3\sigma} \leqslant x < 0, \\ \dfrac{2}{3}, & 0 \leqslant x < \dfrac{2(3s+1)\pi}{3\sigma}, \\ 1, & x \geqslant \dfrac{2(3s+1)\pi}{3\sigma}; \end{cases} \qquad \rho(x) = \begin{cases} 0, & x < \dfrac{(6r-1)\pi}{3\sigma}, \\ \dfrac{1}{3}, & \dfrac{(6r-1)\pi}{3\sigma} \leqslant x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x < \dfrac{(6s+1)\pi}{3\sigma}, \\ \dfrac{1}{3}, & x \geqslant \dfrac{(6s+1)\pi}{3\sigma} \end{cases}$$

(r, s — целые, $r \leqslant s$) и, вообще, такие, у которых для некоторой системы значений x_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n+1;$ $x_0 = -\infty,$ $x_{n+1} = \infty,$ $x_k < x_{k+1})$ $\rho(x) = \lambda_k^{(n)}$, когда $x_k \leqslant x < x_{k+1}$, причем $\sum\limits_{k, j=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \lambda_j^{(n)} \cos \sigma(x_k - x_j) = 0$.

Для доказательства теоремы 1 вводятся в рассмотрение функции:

$$\gamma_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma x - k\pi}, & |\sigma x - k\pi| \geqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |\sigma x - k\pi| < \dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \sum_{|k|=1}^{\infty} \left[\gamma_k(x) + \frac{1}{k\pi}\right] \cdot (-1)^k f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right).$$

Если $\rho(x)$ удовлетворяет условию (3), то, как легко видеть:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma(x) \sin \sigma(x+t)\, d\rho(t) \equiv 0. \tag{4}$$

Поэтому, пользуясь известным представлением для функций $f(x) \in B_\sigma^{(1)}$ [1], мы находим, что при $0 < q \leqslant 1$

$$R(f; x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right) \sin \sigma(x+t) \left[\frac{1}{\sigma(x+t) - k\pi} - \gamma_k(x)\right] \right\} d\rho(t).$$

Следовательно,

$$|R(f;x)|\leqslant M\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\sin\sigma(x+t)|\left|\frac{1}{\sigma(x+f)-k\pi}-\gamma_k(x)\right|\cdot|d\rho(t)|.$$

Обозначив теперь через $k_x=k(x)$ целое число, для которого $|\sigma x-k_x\pi|\leqslant\pi/2$, мы, таким образом, имеем

$$|R(f;x)|\leqslant M\sigma\int\limits_{-\infty}^{\infty}|t|\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{|\sigma(x+t)-k\pi|\cdot|\sigma x-k\pi|}|d\rho(t)|+C(x),$$

где штрих при Σ обозначает, что суммирование под интегралом не распространяется на индексы $k(x)$ и $k(x+t)$, а $C(x)$ — функция, равномерно ограниченная на всей вещественной оси. Но так как функция

$$\Phi(x,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{|\sigma(x+t)|-k\pi|\cdot|\sigma x-k\pi|}$$

равномерно ограничена относительно всех возможных значений x и t, то, в силу условия на бесконечности, которому удовлетворяет $\rho(x)$, функция $R(z)=R(f;z)$ будет принадлежать классу B_σ. Аналогично в случае, когда $1<q\leqslant 2$.

Если же условие (3) не выполнено, то найдется уходящая в бесконечность последовательность точек $\{x_n\}$ $(n=1,2,\ldots)$ таких, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\sigma(x_n+t)\,d\rho(t)=a\neq 0.$$

В этом случае рассматривается функция

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma z\sin\sigma z}{k\pi(\sigma z-k\pi)},$$

которая, как нетрудно заметить, при любом $q>0$ принадлежит классу $B_\sigma^{(q)}$. Для нее

$$R(f;x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\sigma(x+t)\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k\pi}+\frac{1}{\sigma(x+t)-k\pi}\right\}d\rho(t),$$

и, стало быть,

$$R(f;x_n)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\sigma(x_n+t)\ln(1+|x_n+t|)\,d\rho(t)+O(1),$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно x_n.

В силу (1) отсюда легко следует, что

$$|R(f;x_n)|=\int\limits_{-\frac{1}{2}x_n}^{\frac{1}{2}x_n}\sin\sigma(x_n+t)\ln(1+|x_n|)\,d\rho(t)+O(1).$$

Таким образом, при $n\to\infty$

$$|R(f;x_n)|>{}^1/_2|a|\ln(1+|x_n|)+O(1),$$

и, следовательно, в данном случае интерференции нет.

Рассмотрим еще случай, когда

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{m\pi}{2\sigma}, \\ \frac{1}{2}, & -\frac{m\pi}{2\sigma} \leqslant x < \frac{m\pi}{2\sigma}, \\ 1 & x \geqslant \frac{m\pi}{2\sigma}. \end{cases} \tag{5}$$

Из теоремы 1 непосредственно вытекает:

Следствие. *Для того чтобы при всякой функции* $f(z) \in B_\sigma^{(q)}$ $(0 < q \leqslant 2)$ *сумма* $f(z) + f(z+\tau)$ *(соответственно, разность* $f(z) - f(z+\tau)$*) принадлежала классу* B_σ, *необходимо и достаточно, чтобы* $\tau = (2p+1)\pi/\sigma$ *(соответственно,* $\tau = 2p\pi/\sigma$*), где* p *— целое.*

Таким образом, функция $\rho(x)$, определенная согласно (5), в случае, когда m нечетно, порождает интерференцию. Применительно к ней мы устанавливаем следующий окончательный разультат:

Теорема 3. *Для всякой функции* $f(z) \in B_\sigma^{(1)}$ *и любого нечетного* m *справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2} \sup_{-\infty < x < \infty} \left| f\left(x - \frac{m\pi}{2\tau}\right) + f\left(x + \frac{m\pi}{2\sigma}\right) \right| \leqslant \frac{4M}{\pi m} + \frac{8mM}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m^2 - 4\nu^2}, \tag{6}$$

которое на рассматриваемом классе функций улучшить нельзя.

При любом таком m *существует функция* $f(z) \in B_\sigma$, *обращающая* (6) *в точное равенство.*

Теорема 3 обобщает известное точное неравенство, недавно установленное С. Н. Бернштейном [2], и содержит его при $m = 1$.

Следствие. *При неограниченном увеличении нечетного числа* m *для всякого* $0 < q \leqslant 1$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$\sup_{f \in B_\sigma^{(q)}} \sup_{-\infty < x < \infty} \left| f\left(x - \frac{m\pi}{2\sigma}\right) + f\left(x + \frac{m\pi}{2\sigma}\right) \right| = \frac{8M}{\pi} \ln m + O(1), \tag{7}$$

где $O(1)$ *— величина, ограниченная относительно* m.

Соотношение (7) показывает, в какой мере отставание в аргументе влияет на качественное ухудшение интерференции в классах $B_\sigma^{(q)}$.

Доказательство теоремы 3 основано на рассмотрении известной интерполяционной формулы [1] для функций $f(x) \in B_\sigma^{(1)}$ и на некоторых связанных с нею преобразованиях (см., например, [3]). Функция $f(z)$ из класса B_σ, обращающая (6) в точное равенство, имеет вид

$$f(z) = 2 \sum_{\nu=-\frac{m-1}{2}}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\sin \sigma z}{\sigma z - \nu\pi} + \cos \sigma z. \tag{8}$$

В заключение заметим, что операторы вида (2) и родственные задачи в связи с некоторыми вопросами теории приближения функций рассматривались нами ранее в [6] (см. гл. IV, § 6), а также в [3-5,7].

Поступило
22 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, **54**, № 2, 103 (1946). [2] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., **12**, № 5 (1948). [3] А. Ф. Тиман, Изв. АН СССР, сер. матем., **11**, № 3 (1947). [4] А. Ф. Тиман, ДАН, **61**, № 6, 989 (1948). [5] А. Ф. Тиман, И. М. Ганзбург, ДАН, **63**, № 6, 619 (1948). [6] А. Ф. Тиман, Исследования по теории приближения функций, Диссертация, Харьков, 1951. [7] И. М. Ганзбург, ДАН, **64**, № 2, 13 (1949).