Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

Л. Н. СЛОБОДЕЦКИЙ

О СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 I 1953)

Линейный дифференциальный оператор

$$Lu = (-1)^m \sum_{(k)} A^{(k_1, \ldots, k_{2m})}(x) \frac{\partial^{2m} u(x)}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_{2m}}} + Tu, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $A^{(k_1, \ldots, k_{2m})}(x)$ — квадратные матрицы порядка N; $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_N(x))$ — вектор-функция и T — линейный дифференциальный оператор порядка $< 2m$, М. И. Вишик [1] называет сильно эллиптическим в области (D) евклидова пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, если в ней квадратичная форма

$$F(L) = \Big(\sum_{(k)} A^{(k_1, \ldots, k_{2m})}(x)\, \alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_{2m}} y,\ y\Big) > 0 \tag{2}$$

при любых действительных α_k и

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 > 0, \quad (y, y) = \sum_{j=1}^{N} |y_j|^2 > 0.$$

Пусть

$$C^{(k_1, \ldots, k_{2m})}(x) = {}^1/_2 \left(A^{(k_1, \ldots, k_{2m})}(x) + A^{(k_1, \ldots, k_{2m})*}(x)\right)$$

симметричная часть матрицы $A^{(k_1, \ldots, k_{2m})}(x)$.

Представим каждую из матриц $C^{(k_1, \ldots, k_{2m})}(x)$ в виде

$$C^{(k_1, \ldots, k_{2m})}(x) = \sum_{(i)(j)} B^{(i_1, \ldots, i_m;\, j_1, \ldots, j_m)}(x),$$

где матрицы $B^{(i_1, \ldots, i_m;\, j_1, \ldots, j_m)}$ подчинены следующим условиям:

1) они симметричны;
2) имеют непрерывные производные до порядка m и
3) $B^{(i_1, \ldots, i_m;\, j_1, \ldots, j_m)} = B^{(j_1, \ldots, j_m;\, i_1, \ldots, i_m)}$.

Индексы $(i_1, \ldots, i_m;\, j_1, \ldots, j_m)$ отличаются от $(k_1, \ldots, k_{2m})$ только порядком следования.

Дифференциальный оператор

$$Cu = (-1)^m \sum_{(i)\,(j)} \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \left(B^{(i_1, \ldots, i_m;\, j_1, \ldots, j_m)} \frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}}\right)$$

называется главной самосопряженной частью оператора Lu.

Операторы 2-го порядка имеют только одну главную самосопряженную часть; операторы более высокого порядка имеют их бесчисленное множество.

Пусть $\Omega(D)$ — многообразие неограниченно дифференцируемых в (D) вектор-функций u, обращающихся в нуль в граничной полоске (D).

Как показано в работе ([1]), если $B^{(i_1, \ldots, i_m; j_1, \ldots, j_m)}$ — постоянные матрицы, то из неравенства (2) следует для всех $u \in \Omega(D)$:

$$\int_{(D)} \ldots \int (Cu, u)\, dx = \sum_{(i)(j)} \int_D \ldots \int \left(B^{(i_1, \ldots, i_m; j_1, \ldots, j_m)} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \frac{\partial^m u}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}}\right) dx \geqslant$$

$$\geqslant \mu \int_D \ldots \int \sum_{(i)} \left(\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}, \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}}\right) dx, \quad dx = dx_1 \ldots dx_n, \qquad (3)$$

где $\mu > 0$ — постоянная.

Неравенство (3), названное автором условием (E), основное в работе ([1]).

Ниже будет доказано, что сильная эллиптичность оператора L в случае переменных матриц недостаточна для выполнения (3).

Пусть $h > 0$, $\omega(x, h) = S(x, h) + \varphi(h)$, где

$$S(x, h) = \begin{cases} \dfrac{1}{ah^2} e^{\frac{r^2}{r^2 - h^2}} & \text{при} \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < h; \\ 0 & \text{при} \quad r \geqslant h, \ a = \displaystyle\iint_{r<1} e^{\frac{r^2}{r^2-1}} dx_1 dx_2 \end{cases}$$

ядро С. Л. Соболева, $\varphi(h) > 0$ и $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Рассмотрим самосопряженный оператор 2-го порядка

$$L_h u = -\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\omega(x, h) A_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\omega(x, h) A_{12} \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\omega(x, h) A_{21} \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\omega(x, h) A_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right],$$

где $u = (u_1, u_2)$,

$$A_{11} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^1/_8 \end{Vmatrix}, \quad A_{12} = A_{21} = -\begin{Vmatrix} 0 & {}^1/_2 \\ {}^1/_2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_{22} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Оператор L_h сильно эллиптический при любом $h > 0$, так как

$$F(L_h) = \omega(x, h)\left[(y_1^2 + {}^1/_8 y_2^2)\alpha_1^2 - 2y_1 y_2 \alpha_1 \alpha_2 + (y_1^2 + y_2^2)\alpha_2^2\right] =$$

$$= \omega(x, h)\left[(y_1\alpha_1 - y_2\alpha_2)^2 + {}^1/_8 y_2^2 \alpha_1^2 + y_1^2 \alpha_2^2\right] > 0$$

при $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ и $y_1^2 + y_2^2 > 0$.

Очевидно, что $Cu = L_h u$.

Пусть $\sigma > 1$ и

$$u_1(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\sigma^2 - 1)^2 e^{\frac{1}{\sigma^2 - 1} + \frac{1}{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - \sigma^2}} & \text{при} \quad x_1^2 + (x_2 - 1)^2 < \sigma^2; \\ 0 & \text{при} \quad x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \geqslant \sigma^2; \end{cases}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \begin{cases} (\sigma^2 - 1)^2 e^{\frac{1}{\sigma^2 - 1} + \frac{1}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - \sigma^2}} & \text{при} \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < \sigma^2; \\ 0 & \text{при} \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \geqslant \sigma^2. \end{cases}$$

Если (D) — круг достаточно большого радиуса, то $u \in \Omega(D)$. Кроме того,

$$\frac{\partial u_1(0,0)}{\partial x_1} = \frac{\partial u_2(0,0)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u_1(0,0)}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial u_2(0,0)}{\partial x_1} = 2.$$

Согласно теореме С. Л. Соболева [2], при $h \to 0$

$$\iint\limits_{(D)} (Cu, u)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint\limits_{(D)} \omega(x, h)\left[\left(A_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + 2\left(A_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \left(A_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right] dx_1 dx_2 =$$

$$= \left[\left(A_{11}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + 2\left(A_{12}\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \left(A_{22}\frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\right]_{\substack{x_1=0\\ x_2=0}} + o(1) =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right]_{\substack{x_1=0\\ x_2=0}} + o(1) =$$

$$= -\frac{1}{2} + o(1).$$

Следовательно, при достаточно малом h неравенство (3) не выполняется.

Аналогичным способом можно доказать, что из эллиптичности оператора порядка > 2 над функцией не следует, вообще говоря, неравенство (3).

Например, любая главная самосопряженная часть эллиптического при любом $h > 0$ оператора 4-го порядка

$$Lu = \omega(x, h)\left(4\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} - 8\frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + 15\frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}\right)$$

не подчиняется условию (3).

Поступило
19 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Матем. сборн., 29, (71) : 3, 615 (1951). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950, стр. 18—21.