Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. В. ЛИННИК

О НЕКОТОРЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СТАТИСТИКАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 I 1953)

1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — независимые наблюдения над случайной величиной X, распределенной по закону $F(x)$; $\chi_1(x_1, \ldots, x_r)$ и $\chi_2(x_1, \ldots, x_r)$ — две непрерывные статистики (функции наблюдений).

Пусть $\chi_1(x_1, \ldots, x_r)$ и $\chi_2(x_1, \ldots, x_r)$ одинаково распределены (что будем обозначать: $\chi_1 \cong \chi_2$). Это налагает некоторые условия на вид закона $F(x)$ (например, $F(x)$ принадлежит некоторому классу Ω распределений, зависящих от конечного числа неопределенных параметров). Свойство $\chi_1 \cong \chi_2$ можно интерпретировать как требование однородности некоторой новой выборки и использовать как критерий согласия со статистической гипотезой $F(x) \in \Omega$.

В заметке([1]) был рассмотрен случай, когда χ_1 и χ_2 — линейные статистики, выделяющие в указанном выше смысле тип нормальных законов Ω *. В данной заметке рассматриваются линейные статистики, выделяющие более общие классы устойчивых законов и их композиций, и «дуальные» к ним в некотором смысле статистики вида $\sup(a_1 x_1, \ldots, a_r x_r)$.

Рассмотрим сперва линейные статистики:

$$L_1 = a_1 x_1 + \ldots + a_r x_r, \qquad L_2 = b_1 x_1 + \ldots + b_r x_r$$

любые реальные числа. Будем считать, что $L_1 \cong L_2$ и

$$\sup(|a_1|, \ldots, |a_r|) \neq \sup(|b_1|, \ldots, |b_r|). \tag{1}$$

Функцию $\sigma(z) = |a_1|^z + \ldots + |a_r|^z - |b_1|^z - \ldots - |b_r|^z$ будем называть определяющей. Величины x_i будут распределены по закону $F(x)$.

Теорема 1. *Пусть γ — максимальный действительный корень определяющей функции $\sigma(z)$. Если закон $F(x)$ имеет $2m$-й момент, где $m = \left[\frac{\gamma}{2} + 1\right]$, то $F(x)$ — нормальный закон (может быть, несобственный).*

Теорема 1'. *Если отбросить требование* (1), *то имеет место теорема 1, где вместо γ надо поставить точную верхнюю грань абсцисс всех нулей $\sigma(z)$ (она конечна, если $\sigma(z) \not\equiv 0$).*

Надо заметить, что существование любого фиксированного количества моментов закона $F(x)$ при условии $\sigma(z) \not\equiv 0$, $L_1 \cong L_2$, еще не обес-

---

* В указанной заметке по недосмотру опущено первоначальное условие о формах L_1 и L_2: максимумы модулей коэффициентов не должны совпадать. Кроме того, в п. 5 теоремы пропущено слово «простым».

печивает нормальности $F(x)$. Необходимые и достаточные условия нормальности даны в ([1]).

Теорема 2. *Пусть заданы числа* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ *под условием*

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_l \leqslant 2. \tag{2}$$

Тогда можно построить бесконечно много четверок линейных статистик L_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ *таких, что если* $L_1 \cong L_2$ *и* $L_3 \cong L_4$ *для какого-либо симметрического закона* $\Phi(x)$ *с характеристической функцией* $f(u)$, *то*

$$f(u) = \exp\Big(-\sum_{j=1}^{l} A_{\gamma_j} |u|^{\gamma_j}\Big), \tag{3}$$

где A_{γ_j} — *некоторые константы;* $A_{\gamma_1} \geqslant 0$ *и* $A_{\gamma_l} \geqslant 0$.

Обратно, для любого симметрического закона $\Phi(x)$ *с характеристической функцией вида* (3) *(например, композиции устойчивых законов) будем иметь:* $L_1 \cong L_2$, $L_3 \cong L_4$.

Состав множества характеристических функций подобного типа поясняется теоремой:

Теорема 3. *Пусть заданы положительные числа* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$, *причем* $0 < \gamma_1 < 2$, *положительное число* $A_l > 0$ *и произвольные действительные числа* $E_2, E_3, \ldots, E_{l-1}$.

Тогда при всяком достаточно большом A *функция*

$$f(u) = \exp\left(-A|u|^{\gamma_1} + E_2|u|^{\gamma_2} + \ldots + E_{l-1}|u|^{\gamma_{l-1}} - A_l|u|^{\gamma_l}\right)$$

будет характеристической функцией некоторого симметрического закона $\Phi(x)$.

Теорема 4. *Пусть некоторая характеристическая функция* $f(u)$ *на отрезке действительной оси* $-\delta \leqslant u \leqslant \delta$ *имеет вид*

$$f(u) = e^{P(u)},$$

где $P(u)$ — *какой-либо полином, а* $\delta > 0$ — *любое фиксированное число.*

Тогда на всей действительной оси

$$f(u) = e^{-a^2u^2 + biu},$$

где a, b *действительны.*

2. Характеристическая функция $f(u)$ случайной величины X с интегральным законом $F(x)$ связана с этим законом преобразованием Фурье — Стилтьеса и, ввиду этого, $f(u)$ и $F(x)$ будут связаны известного рода дуальностью. В силу этого операции сложения независимых случайных величин, при которой характеристические функции перемножаются, будет отвечать операция взятия максимального члена вариационного ряда, при которой интегральные законы перемножаются.

Это приводит к теоремам, в этом смысле дуальным к предыдущим.

Линейным статистикам $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_rx_r$ будут отвечать статистики вида

$$\sup\left(\frac{x_1 - \alpha}{A}, \frac{x_2 - \alpha}{A}, \ldots, \frac{x_r - \alpha}{A}\right),$$

где $A_i > 0$, α — любое действительное число. Их будем называть M-статистиками.

Теорема 5. *Пусть задано действительное число* α *и положительные числа* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$.

Тогда можно построить бесконечно много четверок М-статистик M_i ($i = 1, 2, 3, 4$) *таких, что если* $M_1 \cong M_2$ *и* $M_3 \cong M_4$ *и если интегральный закон наблюдений* $F(x)$ *исчезает при* $x < \alpha$, *то*

$$F(x) = \exp\left(-\frac{E_1}{(x-\alpha)^{\gamma_1}} - \frac{E_2}{(x-\alpha)^{\gamma_2}} - \ldots - \frac{E_l}{(x-\alpha)^{\gamma_l}}\right), \tag{4}$$

где E_i — *неопределенные параметры (не непременно положительные).*

Обратно, для всякого закона вида (4) $M_1 \cong M_2$, $M_3 \cong M_4$.

Теорема 6. *Пусть*

$$M_1 = \sup\left(\frac{x_1-\alpha}{A_1}, \ldots, \frac{x_r-\alpha}{A_r}\right); \quad M_2 = \sup\left(\frac{x_1-\alpha}{B_1}, \ldots, \frac{x_r-\alpha}{B_r}\right)$$

две М-статистики, причем $\inf(A_1, \ldots, A_r) \neq \inf(B_1, \ldots, B_r)$. *Положим* $A_i^{-1} = a_i$, $B_i^{-1} = b_i$ *и составим определяющую функцию*

$$\sigma(z) = a_1^z + \ldots + a_r^z - b_1^z - \ldots - b_r^z.$$

Пусть γ — *максимум модуля ее действительных корней и* $m = \left[\frac{\gamma}{2} + 1\right]$. *Если интегральный закон* $F(x)$ *исчезает при* $x < \alpha$ *и для какого-либо* $\delta > 0$ *существует* $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}(x-\alpha)^{2m} \ln F(x)$ *при* $\alpha < x < \alpha + \delta$ *и стремится к конечному пределу при* $x \to \alpha - 0$ *, *то при* $M_1 \cong M_2$

$$F(x) = \exp\left(-\frac{E_1}{x-\alpha} - \frac{E_2}{(x-\alpha)^2} - \ldots - \frac{E_m}{(x-\alpha)^{2m}}\right).$$

Поступило
3 I 1953

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Линник, ДАН, 83, № 3 (1952).

* Это свойство, в известном смысле дуальное к существованию момента в теореме 1.