Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXIX, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

АНАЛОГ НЕРАВЕНСТВ ЧЕБЫШЕВА — МАРКОВА В ОДНОМЕРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 2 I 1952)

Известно, что одномерная краевая задача являет много аналогий с классической проблемой моментов. Поиски нераскрытых еще аналогий между этими двумя задачами приводят к существенно новым выводам.

Именно на этом пути был получен ряд новых результатов в наших последних работах ([1-3]). Здесь сообщаются дальнейшие результаты в этом направлении. Формулируемая ниже теорема 1 является аналогом известного предложения Неванлинна ([4]) из проблемы моментов. После нашей формулы обобщенной резольвенты (см. ([5]), стр. 374—393) потребовалось немного, чтобы ее получить.

Теорема 2 является аналогом знаменитых неравенств П. Л. Чебышева ([6]), открытых им в 1874 г. и впервые в развернутом виде доказанных, а затем и обобщенных в различных направлениях А. А. Марковым ([7]).

Теорема 2 открывает новый, причем весьма простой подход к асимптотической формуле В. А. Марченко ([8]) для спектральных функций одномерной краевой задачи, позволяющий уточнить и обобщить эту формулу.

Вообще, заметим, что теоремы 1 и 2 позволяют дать совершенно новое изложение сингулярной краевой задачи, отправляясь от обычной задачи Штурма — Лиувилля.

Пусть $0 < l < \infty$, а $q(x)$ и $\rho(x)$ $(0 \leqslant x < l)$ — функции, измеримые и суммируемые в каждом интервале $(0, a)$, где $a < l$. Пусть, кроме того, функция $\rho(x)$ неотрицательна и не обращается в нуль (почти всюду) ни на каком подинтервале интервала $(0, l)$.

Рассмотрим дифференциальную систему:

$$y'' - q(x)\,y + \lambda\rho(x)\,y = 0, \quad y'(0) - hy(0) = 0, \tag{1}$$

где h — какое-либо вещественное число, а λ — комплексный параметр. Обозначим через $\varphi(x; \lambda)$ какое-либо решение этой системы, нормированное условиями:

$$\varphi(0; \lambda) = 1, \quad \varphi'(0; \lambda) = h,$$

а через $\psi(x; \lambda)$ — решение дифференциального уравнения из (1), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\psi(0; \lambda) = 0, \quad \psi'(0; \lambda) = 1.$$

Положим

$$D_0(x;\lambda) = -\lambda \int_0^x \varphi(s;\lambda)\varphi(s;0)\rho(s)\,ds,$$

$$D_1(x;\lambda) = 1 + \lambda \int_0^x \varphi(s;\lambda)\varphi(s;0)\rho(s)\,ds \quad (0 \leqslant x < l);$$

$$E_0(x;\lambda) = 1 - \lambda \int_0^x \psi(s;\lambda)\varphi(s;0)\rho(s)\,ds, \quad E_1(x;\lambda) = \lambda \int_0^x \psi(s;\lambda)\psi(s;0)\rho(s)\,ds.$$

Легко установить для любых комплексных λ, μ тождество:

$$D_1(x;\lambda)D_0(x;\mu) - D_1(x;\mu)D_0(x;\lambda) =$$

$$= (\lambda-\mu)\int_0^x \varphi(s;\lambda)\varphi(s;\mu)\rho(s)\,ds \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{2}$$

Рассмотрим неопределенный случай, когда для любого λ

$$\int_0^l |\varphi(x;\lambda)|^2\rho(x)\,dx < \infty, \quad \int_0^l |\psi(x;\lambda)|^2\rho(x)\,dx < \infty.$$

В частности, этот случай имеет место, когда система (1) регулярна, т. е. $l < \infty$, а $q(x)$ и $\rho(x)$ — функции, суммируемые по всему интервалу $(0, l)$.

Заметим, что в неопределенном случае функции D_k, E_k $(k = 0, 1)$ имеют смысл также при $x = l$.

Теорема 1. *Пусть $N(\lambda)$ — некоторая функция, голоморфная в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, причем $\operatorname{Im} N(\lambda) \geqslant 0$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Случай, когда $N(\lambda)$ вырождается в бесконечную константу, также допускается.*

Тогда

$$\frac{E_0(l;\lambda)N(\lambda) + E_1(l;\lambda)}{D_0(l;\lambda)N(\lambda) + D_1(l;\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(\mu)}{\mu-\lambda} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0),$$

где $\tau(\mu-0) = \tau(\mu)$ $(-\infty < \mu < \infty;$ $\tau(0) = 0)$ — некоторая неубывающая функция, причем интеграл справа сходится абсолютно.

Совокупность всех получаемых таким образом функций τ совпадает с совокупностью S_h всех спектральных функций системы (1). *Функция $\tau \in S_h$ будет ортогональной спектральной функцией в том и только том случае, когда соответствующая ей функция $N(\lambda)$ вырождается в вещественную константу $(\leqslant \infty)$.*

Определение спектральной функции и ортогональной спектральной функции системы (1) можно найти в ([9]). Там же было установлено, что любая спектральная функция $\tau \in S_h$ удовлетворяет условию:

$$\int_{-\infty}^{0} \exp(\sqrt{\lambda t})\,d\tau(\lambda) < \infty \quad \text{при } 0 \leqslant t < 2\int_0^l \sqrt{\rho(x)}\,dx (\leqslant \infty). \tag{3}$$

Если учесть, что $E_0D_1 - E_1D_0 \equiv 1$, то, согласно теореме 1, можно утверждать, что любой точке μ $(-\infty < \mu < \infty)$ соответствует одна и только одна ортогональная спектральная функция $\tau_\mu(\lambda)$, имеющая в своем спектре точку μ. Эта функция будет иметь своим спектром множество всех корней λ_k $(k \in K)$ целой функции

$$\Phi_\mu(\lambda) = D_1(l;\lambda)D_0(l;\mu) - D_0(l;\lambda)D_1(l;\mu),$$

а ее скачки будут равны:

$$\tau_\mu(\lambda_k+0)-\tau_\mu(\lambda_k-0)=\delta(\lambda_k) \qquad (k\in K),$$

где

$$\delta^{-1}(\lambda)=D'_1(l;\lambda)D_0(l;\lambda)-D'_0(l;\lambda)D_1(l;\lambda)=\int_0^l|\varphi(x;\lambda)|^2\rho(x)\,dx.$$

Теорема 2. *Пусть $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_m$ — последовательные точки спектра некоторой ортогональной спектральной функции $\tau_\mu(\lambda)$. Тогда для любой спектральной функции $\tau\in S_h$*

$$\tau(\lambda_m+0)-\tau(\lambda_0-0)\leqslant\sum_{j=0}^{m}\delta(\lambda_j); \quad \tau(\lambda_m-0)-\tau(\lambda_0+0)\geqslant\sum_{j=1}^{m-1}\delta(\lambda_j). \quad (4)$$

Знак равенства в одном или другом соотношении имеет место в том и только в том случае, когда $\tau(\lambda)=\tau_\mu(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$. Если зафиксировать $\lambda_m=\mu$ и затем устремлять m к бесконечности, то мы получим для любого μ $(-\infty<\mu<\infty)$ неравенство:

$$\tau(\mu+0)-\tau(-\infty)\leqslant\tau_\mu(\mu+0)-\tau_\mu(-\infty),$$
$$\tau(\mu-0)-\tau(-\infty)\geqslant\tau_\mu(\mu-0)-\tau_\mu(-\infty). \quad (5)$$

Если хотя бы у одной ортогональной сцектральной функции (а значит, у всех ортогональных функций) спектр полуограничен снизу, то найдется такое Λ, что будем иметь $\tau(\lambda)\leqslant\delta(\lambda)+\tau(-\infty)$ при $\lambda\leqslant\Lambda$. Отсюда, между прочим, может быть получено (3).

Поясним идею доказательства теоремы 2, представляющую собою развитие идеи А. А. Маркова (7) доказательства неравенств Чебышева. Подберем многочлен $Q(\lambda)$ степени $2m+1$ так, чтобы функция

$$F(\lambda)=Q(\lambda)\Phi_\mu(\lambda)\Big/\prod_{j=0}^{m}(\lambda-\lambda_j)^2$$

удовлетворяла условиям

$$F(\lambda_j)=1, \quad F'(\lambda_j)=0 \quad (j=1,2,\ldots,m-1); \quad F(\lambda_0)=F(\lambda_m)=0.$$

Оказывается, она тогда будет удовлетворять неравенствам:

$$F(\lambda)<1 \text{ при } \lambda_0<\lambda<\lambda_m, \quad \lambda\neq\lambda_j \quad (j=1,2,\ldots,m-1);$$
$$F(\lambda)\leqslant 0 \text{ при } \lambda\,\overline{\in}\,(\lambda_0,\lambda_m).$$

С другой стороны, на основании характеристического свойства спектральной функции $\tau\in S_h$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\int_0^l f(x)\varphi(x;\lambda)\rho(x)\,dx\Big|^2 d\tau(\lambda)=\int_0^l|f(x)|^2\rho(x)\,dx$$

и соотношения (2) для любого $\tau\in S_h$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\,d\tau(\lambda) \qquad (\leqslant\tau(\lambda_m-0)-\tau(\lambda_0+0))$$

имеет одно и то же значение. Так как при $\tau=\tau_\mu(\lambda)$ этот интеграл равен величине, стоящей в скобках, то отсюда получаем второе из соотношений (4). Аналогично доказывается первое из соотношений (4).

Рассмотрим теперь систему (1) без каких-либо предположений относительно того, какой случай (определенный или неопределенный) для нее имеет место. Изменим наши обозначения: заменим l на L ($\leqslant \infty$). По определению, всякая спектральная функция $\tau(\lambda)$ системы (1) в интервале $(0, L)$ будет спектральной функцией этой системы в любом интервале $(0, l)$, где $0 < l < L$. С другой стороны, в интервале $(0, l)$ система (1) регулярна и к ней применима теорема 2. Отсюда можно получить асимптотические формулы для спектральных функций $\tau(\lambda)$. Поясним это для того случая, когда $\rho(x) \equiv 0$ $(0 \leqslant x < L)$. В этом случае для функции $\delta(\lambda) = \delta(\lambda; l)$ системы (1) в интервале $(0, l)$ имеет место асимптотическая формула

$$\delta(\lambda; l) = \frac{2}{l} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{при } \lambda \to +\infty. \tag{6}$$

Обозначим через $\tau_0(\lambda; l)$ ортогональную спектральную функцию системы (1) в интервале $(0, l)$, отвечающую граничному условию $y'(l) = 0$, и пусть $n(r; l)$ $(r > 0)$ обозначает число точек спектра $\tau_0(\lambda; l)$ меньших r. Тогда, как известно, $n(r; l) = (l/\pi)\sqrt{r} + O(1/\sqrt{r})$ при $r \to \infty$, откуда

$$\tau_0(\lambda; l) = \int_0^\lambda \delta(r; \lambda)\, dn(r; l) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + O(\ln \lambda) \quad \text{при } \lambda \to \infty. \tag{7}$$

Так как в силу теоремы 2 для любой спектральной функции $\tau(\lambda)$ системы (1) в интервале $(0, L)$ выполняется неравенство $|\tau(\lambda) - \tau_0(\lambda; l)| < \delta(\lambda; l) - \delta(0; l)$, то также

$$\tau(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} + O(\ln \lambda) \quad \text{при } \lambda \to \infty. \tag{8}$$

Эта формула была недавно получена Б. М. Левитаном ([10]) как уточнение формулы В. А. Марченко, в которой вместо $O(\ln \lambda)$ стояло $o(\sqrt{\lambda})$.

Наши рассуждения показывают, что асимптотика для $\tau(\lambda)$ зависит в основном от поведения функции $q(x)$ в окрестности нуля. Пусть, например, в некоторой правой окрестности $(0, l)$ нуля функция $q(x)$ имеет ограниченную производную. Тогда асимптотические формулы для $\delta(\lambda; l)$ и $n(r; l)$ могут быть уточнены (см. ([11]), стр. 14—16), после чего в (7) символ $O(\ln \lambda)$ может быть заменен на $O(1/\sqrt{\lambda}) + c$ (c — константа). Отсюда, в силу (5), в (8) вместо $O(\ln \lambda)$ можно поставить $O(1)$.

Если $L = \infty$ и при любом конечном $l > 0$ функция $q(x)$ имеет ограниченную производную в интервале $(0, l)$, то предыдущие рассуждения позволяют утверждать, что в (8) величина $O(\ln \lambda)$ может быть заменена на величину $c + o(1)$ (c — константа).

За недостатком места мы опустили исследование системы (1) при $h = \infty$, т. е., когда граничное условие в (1) заменяется условием $y(0) = 0$.

Поступило
16 XII 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, Изв. АН СССР, сер. матем., **16**, № 4, 293 (1952). [2] М. Г. Крейн, ДАН, **76**, № 3 (1951); **82**, № 5 (1952). [3] М. Г. Крейн, Прикладн. матем. и мех., **16**, № 5 (1952). [4] R. Nevanlinna, Ann. Acad. Sc. Fennicae, **18**, No. 5 (1922). [5] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов, 1950. [6] П. Л. Чебышев, Полн. собр. соч., **3**, 1948, стр. 63—65. [7] А. А. Марков, Избр. тр., 1948, стр. 15—24 и 176—199. [8] В. А. Марченко, Тр. Московск. матем. об-ва, **1** (1952). [9] М. Г. Крейн, ДАН, **88**, № 3 (1953). [10] Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., **16**, № 4, 325 (1952). [11] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950.