Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Г. БАБУКОВ

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 3 XII 1952)

Рассматриваемая ниже задача встречается в теории глубинных насосов; к ней же приводится ряд других задач теории продольных колебаний стержней и электротехники.

Задача. Найти периодическое периода $T = 2\pi/\omega$, непрерывное при $0 \leqslant x \leqslant l$, $t > 0$, решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\eta \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u(0, t) = 0 \qquad (t > 0); \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &u(l, t) = f_1(t) + A && (t_0 < t < t_1); \\ &\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 && (t_1 < t < t_2); \\ &u(l, t) = f_2(t) + B && (t_2 < t < t_3); \\ &\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0 && (t_3 < t < T + t_0) \end{aligned} \tag{3}$$

$$0 < t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < T + t_0$$

и условиях (непрерывности)

$$\begin{aligned} u(l, t_0) &= f_1(t_0) + A; \\ u(l, t_2) &= f_2(t_2) + B. \end{aligned} \tag{4}$$

Условие (3) записано для промежутка $t_0 < t < T + t_0$, за пределы которого с возрастанием t периодически продолжается с периодом T; f_1, f_2 — заданные непрерывные функции времени; A, B — некоторые, неизвестные заранее, константы.

Перепишем (3) в виде

$$\sigma(t)\, h \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} + \chi(t)\, u(l, t) = \chi_1(t)[f_1(t) + A] + \chi_2(t)[f_2(t) + B], \tag{5}$$

где $h = \text{const} > 0$, σ, χ, χ_1, χ_2 — периодические периода T функции времени, принимающие на интервале $(t_0, T+t_0)$ значения

$$
\begin{aligned}
\sigma(t) &= \begin{cases} 0 & (t_0 < t < t_1,\ t_2 < t < t_3), \\ 1 & (t_1 < t < t_2,\ t_3 < t < T+t_0); \end{cases} \\
\chi_1(t) &= \begin{cases} 1 & (t_0 < t < t_1), \\ 0 & (t_1 < t < T+t_0); \end{cases} \\
\chi_2(t) &= \begin{cases} 0 & (t_0 < t < t_2,\ t_3 < t < T+t_0), \\ 1 & (t_2 < t < t_3); \end{cases} \\
\chi(t) &= \chi_1(t) + \chi_2(t) = 1 - \sigma(t).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Приведем задачу к интегральному уравнению. Решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (2), возьмем в форме

$$u(x, t) = C_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(x)\cos n\omega t + \varphi_n(x)\sin n\omega t], \tag{7}$$

где

$$
\begin{gathered}
f_n(x) = C_n \sin\alpha_n x \operatorname{ch}\beta_n x - D_n \cos\alpha_n x \operatorname{sh}\beta_n x, \\
\varphi_n(x) = D_n \sin\alpha_n x \operatorname{ch}\beta_n x + C_n \cos\alpha_n x \operatorname{sh}\beta_n x, \\
\alpha_n - i\beta_n = \delta_n = \frac{n\omega}{a}\sqrt{1 - i\nu_n} \quad \left(\nu_n = \frac{2n}{n\omega}\right),
\end{gathered}
\tag{8}
$$

C_0, C_n, D_n — неизвестные константы.

Переходя в (7) на границу $x = l$, будем иметь

$$u(\psi) = C + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n \cos n\psi + u_n' \sin n\psi), \tag{9}$$

где

$$u(\psi) = u(l, \psi) \quad (\psi = \omega t), \qquad C = C_0 l, \tag{10}$$

$$u_n = r_n (C_n \cos\zeta_n - D_n \sin\zeta_n), \quad u_n' = r_n (D_n \cos\zeta_n + C_n \sin\zeta_n),$$

$$r_n |\sin\delta_n l|, \quad \zeta_n = \arg\sin\delta_n l.$$

Дифференцируя (7) по x и взяв $x = l$, получим

$$\varepsilon(\psi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n \cos n\psi + \varepsilon_n' \sin n\psi), \tag{11}$$

где

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(\psi) = \frac{\partial u(l, \psi)}{\partial x}, \\
\varepsilon_n = R_n r_n^* (u_n \cos\theta_n + u_n' \sin\theta_n), \quad \varepsilon_n' = R_n r_n^* (u_n' \cos\theta_n - u_n \sin\theta_n), \\
R_n = |\delta_n|, \quad r_n^* = |\operatorname{tg}\delta_n l|, \quad \theta_n = \arg\operatorname{tg}\delta_n l - \arg\delta_n.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

С другой стороны, из (11) имеем

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi, \quad \varepsilon_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varepsilon(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi. \tag{13}$$

Из (12), (13) и (9), переставляя операции суммирования и интегрирования, получаем

$$u(\psi) = C + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_1(\psi, \varphi)\, \varepsilon(\varphi)\, d\varphi, \tag{14}$$

где ядро интеграла

$$K_1(\psi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{R_n r_n^*} \cos[n(\psi - \varphi) - \theta_n]. \tag{15}$$

Константа C в (14) остается произвольной. Подставляя (14) в граничное условие (5), получаем для определения $\varepsilon(\psi)$ следующее интегральное уравнение:

$$\sigma(\psi)\, h\varepsilon(\psi) + \frac{\chi(\psi)}{\pi}\int_0^{2\pi} K_1(\psi, \varphi)\, \varepsilon(\varphi)\, d\varphi = f(\psi), \tag{16}$$

где

$$f(\psi) = \chi_1(\psi) f_1(\psi) + \chi_2(\psi) f_2(\psi) + \chi_1(\psi) A + \chi_2(\psi) B - \chi(\psi) C. \tag{17}$$

Уравнение (16) содержит неизвестные константы A, B, C, которые легко исключить, пользуясь условием (4) и (14). Из (4) и (14) имеем:

$$A = u(\psi_0) - f_1(\psi_0), \quad B = u(\psi_2) - f_2(\psi_2),$$
$$u(\psi_s) = C + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K_1(\psi_s, \varphi)\, \varepsilon(\varphi)\, d\varphi. \tag{18}$$

Внося (18) в (16), получаем:

$$\sigma(\psi)\, h\varepsilon(\psi) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\psi, \varphi)\, \varepsilon(\varphi)\, d\varphi = \chi_1(\psi) F_1(\psi) + \chi_2(\psi) E_2(\psi), \tag{19}$$

где ядро

$$K(\psi, \varphi) = \chi_1(\psi)[K_1(\psi, \varphi) - K_1(\psi_0, \varphi)] + \chi_2(\psi)[K_1(\psi, \varphi) - K_1(\psi_2, \varphi)], \tag{20}$$

а известные функции F_1, F_2 суть

$$F_1(\psi) = f_1(\psi) - f_1(\psi_0), \quad F_2(\psi) = f_2(\psi) - f_2(\psi_2). \tag{21}$$

Уравнение (19) и является интегральным уравнением поставленной задачи (1) — (4)*. Оно уже не содержит никаких неизвестных, кроме функции $\varepsilon(\psi)$. На интервалах $(\omega t_1, \omega t_2)$ и $(\omega t_3, 2\pi + \omega t_0)$ уравнение (19) дает $\varepsilon(\psi) = 0$, как это и должно быть согласно (3). Определив из уравнения (19) $\varepsilon(\psi)$ на остальных частях периода T, что легко может быть сделано приближенными методами, найдем по (12) граничные значения $u(\psi)$ искомой функции $u(x, \psi)$ и, пользуясь далее (10) и (8), восстановим функцию во всем промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$.

Численная проверка показывает, что интегральное уравнение (19) дает эффективный метод решения поставленной задачи.

Рассмотренная задача представляет собой один из простейших вариантов. Тем же методом, без всяких изменений, решается и более общая задача, когда в условии (3) задано не четыре, а сколько угодно частей периода T, на каждой из которых даны условия типа (3), или когда вместо (2) задано неоднородное условие.

Поступило
26 XI 1952

---

* Уравнением (19) функция $\varepsilon(\psi)$ определяется с точностью до значений функции в точках разрыва $\psi = \psi_s$ $(s = 0, 1, 2, 3)$.